奥数-逻辑-抽屉原理

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

📖 **在线阅读**

知识要点

💡 **核心概念：**抽屉原理听起来很高深，其实它讲的是一个非常简单的道理。想象一下，你有3个苹果，要放进2个抽屉。那么，**至少有一个抽屉里会有2个或更多的苹果**。这就是抽屉原理！而“最坏情况”是我们解决问题的关键钥匙。它不是指真的运气最差，而是指在“保证”某种结果一定发生时，我们需要考虑的、最“倒霉”的那种分法。比如，要想保证一个抽屉至少有2个苹果，最坏的情况就是先让每个抽屉都只放1个（尽量平均分），这时再放第3个苹果，无论放进哪个抽屉，都会出现“至少有一个抽屉有2个苹果”的情况。

📝 **计算法则：**对于这类“至少有多少”的保证性问题，可以按以下步骤思考：

确定“抽屉”是什么： 把要分的物体（苹果、鸽子、学生…）放进什么样的“抽屉”里。

尽量平均分（最坏情况）： 用物体总数 m 除以抽屉数 n，得到商 a 和余数 b （$b < n$）。即 $m \div n = a \cdots b$。

得出结论： 那么，**至少有一个抽屉里会有 $(a+1)$ 个物体**。因为最坏情况是每个抽屉先放 a 个，剩下的 b 个再分别放入不同的抽屉，那么至少有1个抽屉会被放到 $a+1$ 个。

🎯 **记忆口诀：** 抽屉原理巧，最坏想到老。物体除以抽屉数，商加一是至少。

🔗 **知识关联：** 这个原理和我们学过的**除法**以及**有余数的除法**密切相关，计算核心就是除法算式。同时，它也锻炼我们的**逻辑推理**和**最优化思维**（如何构造“最坏”情况）。

易错点警示

❌ **错误1：**混淆“至少”和“保证”。
例如：“6只鸽子飞进5个鸽巢，至少有几只鸽子在同一个巢？”错误做法：$6 \div 5 = 1 \cdots 1$，答：至少有1只。
☑ **正解：** “至少”是在保证一定发生的情况下，那个最小的数量。正确计算：$6 \div 5 = 1 \cdots 1$，$1 + 1 = 2$。答：**保证**至少有一个巢里有**2只或以上**的鸽子。

❌ **错误2：**忘记“最坏情况”是尽量平均分，而不是胡乱分。
例如：“至少摸出多少颗棋子能保证有2颗同色？（有黑、白两色）”错误做法：摸2颗可能一黑一白，再摸1颗就行了，所以是3颗。*（虽然答案对，但思路不严谨）*
☑ **正解：** 构造最坏情况：先摸出的2颗正好是1黑1白（每种颜色1颗，即平均分）。这时再摸第3颗，无论是黑是白，都会和已有的某颗同色。所以答案是3颗。**要用“平均分”的思路来严谨推理。**

❌ **错误3：**余数处理错误，直接用物体数除以“至少数”。
例如：“至少有多少人在同一个月过生日？（共25人）”错误做法：$25 \div 12 = 2 \cdots 1$，答：至少有2人。
☑ **正解：** $25 \div 12 = 2 \cdots 1$，商是2，余数是1。最坏情况是每个月先有2人过生日（用了 $12 \times 2 = 24$ 人），剩下的1人无论在哪个月，都会使那个月人数变成 $2 + 1 = 3$ 人。答：**至少有3人**在同一个月过生日。

三例题精讲

🔥 例题1：

一副扑克牌有54张，去掉大小王后还剩52张，共有4种花色（红桃、黑桃、梅花、方块）。问：至少摸出多少张牌，才能保证至少有2张牌的花色相同？

📌 **第一步：确定“抽屉”。** 这里“花色”就是抽屉，有4个抽屉（红桃、黑桃、梅花、方块）。

📌 **第二步：思考“最坏情况”。** 最坏的情况是，前面摸出的牌花色都尽量不同。也就是先摸出了4张牌，正好是4种不同的花色各1张。

📌 **第三步：得出结论。** 这时已经用了4个抽屉各1个物体。再摸第5张牌，无论是什么花色，都会和前面4张中的某一张花色相同。所以答案是5张。

☑ **答案：** 至少摸出5张牌。

💬 **总结：** 当问题是“保证有2个同X”时，最坏情况是先让每个X都拿到1个。

🔥 例题2：

某班有42名学生，他们都订阅了《小学生数学报》、《我们爱科学》或《儿童文学》三种报刊中的一种、两种或三种。问：至少有多少名学生订阅的报刊种类完全相同？

📌 **第一步：确定“抽屉”——订阅的种类有多少种可能。**

订阅一种：有3种选择（只订数学、只订科学、只订文学）。

订阅两种：也有3种选择（数+科、数+文、科+文）。

订阅三种：只有1种选择（数+科+文）。

所以，订阅的种类共有 $3+3+1=7$ 种。这就是7个“抽屉”。

📌 **第二步：应用抽屉原理。** 把42名学生（物体）放进7种订阅类型（抽屉）里。

$42 \div 7 = 6$。商是6，余数是0。

📌 **第三步：分析最坏情况与结论。** 最坏情况（尽量平均分）就是每种订阅类型都有6名学生。因为余数是0，正好平均分完。此时，订阅种类相同的学生最少是6人。如果少于6人，总人数就不可能达到42人。所以，**至少有6人**订阅的报刊种类相同。

☑ **答案：** 至少有6名学生。

💬 **总结：** 关键在于先搞清楚“抽屉”的总数，即所有可能的情况有多少类。当除法没有余数时，“至少数”就是商本身。

🔥 例题3：

一个布袋里有黑、白、红三种颜色的袜子各8只。每次从布袋中摸出一只袜子。问：

(1) 至少摸出多少只，才能保证一定有2只颜色相同？

(2) 至少摸出多少只，才能保证一定有3只颜色相同？

📌 **第一部分解答：**

(1) 颜色是抽屉，共3个。要保证有2只同色。

最坏情况：先摸出3只，正好是黑、白、红各1只。再摸第4只，无论什么颜色，都会与前面某只同色。

✅ 答案：$3 + 1 = 4$ (只)。

📌 **第二部分解答：**

(2) 要保证有3只同色。

最坏情况：尽量阻止有颜色达到3只。即每个颜色先摸出2只（这是“尽量平均分”的升级版，目标是让每个抽屉离“3”还差1）。

此时已摸出 $2 \times 3 = 6$ 只袜子。

再摸第7只袜子，无论是什么颜色，都会使该颜色的袜子变成 $2 + 1 = 3$ 只。

✅ 答案：$2 \times 3 + 1 = 7$ (只)。

💬 **总结：** 对于“保证有a个同X”的问题，最坏情况是让每个“抽屉”都先有 $(a - 1)$ 个物体。需要的物体总数是：**抽屉数 × (a-1) + 1**。

练习题（10道）

由易到难，题目新颖，贴近生活。

把10支铅笔放进3个笔筒里，不管怎么放，总有一个笔筒里至少放进了几支铅笔？

13个同学中，至少有几位同学的属相是相同的？（假设属相有12种）

口袋里有红、黄、蓝三种颜色的球各5个。闭上眼睛，至少摸出几个球，才能保证有2个颜色相同？

某小学共有368名学生，请问这些学生中至少有多少人在同一天过生日？（一年按365天计算）

从1， 2， 3， …， 30这30个自然数中，至少取出几个不同的数，才能保证其中一定有一个数是5的倍数?

一个布袋里有大小、材质完全相同的红、黄、蓝手套各5只（左手、右手分开）。至少摸出几只，才能保证配成一双颜色相同的手套? （一双指左手和右手各一只）

六年级有4个兴趣小组：书法、围棋、舞蹈、航模。每位同学至少参加1个组，最多参加2个组。至少有15名同学参加，才能保证有2人参加的小组完全相同。请问参加兴趣小组的同学至少有多少人?

一次数学测验共有10道判断题，每道题答对得2分，答错或不答得0分。至少有多少名同学参加这次测验，才能保证有3人的得分相同?

在边长为1的正方形内任意放入5个点，求证：其中至少有两个点的距离不超过 $\frac{2}{2}$。（提示：连接正方形两条对边的中点，将正方形分成4个小正方形）

从1至100这100个自然数中，至少选出几个数，才能保证其中一定有两个数的差是9?

奥数挑战（10道）

杯赛真题难度（如迎春杯、华杯赛），需要思维拓展。

在1， 4， 7， 10， 13， …, 100这个等差数列中，至少任选几个数，才能保证其中有两个数的和是104?

将一个 4×7 的方格表随意染上黑色或白色。证明：无论怎样染色，其中必定有一个由方格构成的“田”字形（2×2的正方形），它的四个小方格颜色完全相同。

从1， 2， 3， …， 99， 100中至少选出多少个数，才能保证其中一定有一个数是另一个数的整数倍?

有10个不同的自然数，它们的和是101。证明：其中至少有2个自然数的差是10。

在半径为1的圆内（包括边界），任意给出7个点。证明：其中至少有两个点，它们之间的距离不超过1。

一副扑克牌共54张（包括大小王）。至少摸出多少张，才能保证其中至少有4张牌的花色相同?

在1到100的所有自然数中，任取51个不同的数。证明：其中一定有两个数，它们的差等于50。

一个袋子中有红、黄、蓝、白四种颜色的球各10个。至少摸出多少个球，才能保证其中有5个颜色相同?

证明：任意6个人中，要么有3个人互相认识，要么有3个人互不认识（认识是相互的）。

从1， 3， 5， 7， ...， 97， 99这50个奇数中，至少取出多少个数，才能保证取出的数中，必有两个数的和是102?

生活应用（5道）

融入当下热点场景（高铁、航天、AI、环保、网购等）。

（高铁）一列“复兴号”高铁有8节车厢，每节车厢定员90人。本次列车共有650名乘客。请问：至少有一节车厢的乘客人数不低于多少人?

（航天）中国空间站“天和”核心舱的一个实验柜有12个样品存放格。某次实验准备了37份不同的样品需要放入。请问：至少有一个存放格里的样品不少于多少份?

（AI与环保）一个AI垃圾分类系统，需要识别“可回收物”、“厨余垃圾”、“有害垃圾”、“其他垃圾”四类。在系统测试阶段，工程师连续投入垃圾进行识别。为了保证系统在连续识别中一定能将同一类垃圾正确识别至少3次，工程师至少需要投入多少件垃圾进行测试? （假设识别正确与否在此题中不关心，只关心类别）

（网购）某电商平台的“猜你喜欢”算法，每天从“服饰”、“数码”、“美食”、“图书”、“家居”5个大类中推荐商品给你。如果你希望连续几天内，算法至少有一个大类给你推荐了2天，那么你至少需要连续浏览几天?

（疫情防控）某小区有20栋楼，需要安排核酸检测。街道办准备了400管试剂（每管可检测1人）。为了保证无论居民如何分布在楼栋里，都至少有一栋楼的居民能全部完成检测（即该楼人数≤试剂管数），街道办至少需要准备多少管试剂?

参考答案与解析

【练习题答案】

$10 \div 3 = 3 \cdots 1$， $3 + 1 = 4$ (支)。

$13 \div 12 = 1 \cdots 1$， $1 + 1 = 2$ (位)。

抽屉为3种颜色。最坏情况各摸1个，需3个。第4个保证相同。答：4个。

$368 \div 365 = 1 \cdots 3$， $1 + 1 = 2$ (人)。

5的倍数有 $30 \div 5 = 6$ 个。最坏情况先取完不是5倍数的数，有 $30 - 6 = 24$ 个。再取1个就一定是5的倍数。答：$24 + 1 = 25$ (个)。

配成一双需要一左一右同色。最坏情况：先摸出5只左手套（或右手套）颜色各不同，比如红、黄、蓝、?、?（但只有3种颜色，所以这5只中必有同色左手，但我们要考虑最坏情况）。更严谨的最坏情况：先摸出3只不同颜色的左手套，再摸出3只不同颜色的右手套，此时共6只，可能没有一双配对（可能是3左3右，颜色全部错开）。第7只无论是左手还是右手，都会与另一只手中的某一只配成同色一双。答：7只。

参加小组的方式种类是“抽屉”。只参加1个组：4种。参加2个组：$C_4^2=6$ 种。共 $4+6=10$ 种。要保证有2人方式相同，根据抽屉原理，至少需要 $10+1=11$ 人。但题目说“至少有15名同学参加，才能保证…”，这意味着参加人数≥15。这是一个反向问题：已知“至少数”和“抽屉数”，求物体数。保证有2人相同，需要 $10\times(2-1)+1=11$ 人。但题目条件说需要15人才能保证，这说明实际人数可能少于15但不足以保证？逻辑矛盾。仔细读题：“至少有15名同学参加，才能保证有2人参加的小组完全相同。” 这是一个条件，我们需要求的是“参加兴趣小组的同学至少有多少人？” 这似乎是在给定结论下求最小值。设同学有n人，抽屉10个。要保证有2人相同，需 $n>10$，最小n=11。但题目说需要15人才能保证，这不可能。可能题意是：已知保证有2人相同需要至少15人，问n至少多少？那n显然≥15。所以答案就是15。这是一道理解题意的题。答：15人。

可能得分：0， 2， 4， …， 20。共11种得分。要保证有3人得分相同，最坏情况每个得分先有2人，需 $11\times 2=22$ 人。第23人无论得多少分，都会使该分数有3人。答：23人。

提示：将正方形分成4个边长为 $\frac{1}{2}$ 的小正方形。4个小正方形是抽屉，5个点是物体。$5\div 4=1\cdots 1$，至少有一个小正方形内有2个点。这个小正方形内任意两点最大距离是对角线长

$(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{2}{2}$。所以这两点距离不超过 $\frac{2}{2}$。

构造差为9的“抽屉”：{1,10}, {2,11}, ..., {9,18}, {19,28}, ..., {90,99}, {91,100}。另外，{92}, {93}, ...{100}? 注意：1~100中，差为9的数对可以这样分组：(1,10), (2,11), ..., (9,18), (19,28), ..., (81,90), (91,100)。 剩下92,93,94,95,96,97,98,99这8个数单独成组。这样共有 $9+8+8=25$ 个组？ （实际上1-9每组有一个小于10的数；10-18与1-9对应；19-27与10-18对应？）标准构造：按除以9的余数分组。余0: 9,18,...,99 (11个数)；余1: 1,10,...,100 (12个数)；余2: 2,11,...,92 (11个数)；...余8: 8,17,...,98 (11个数)。最坏情况取所有余数相同的数，但余1组有12个数，可以取12个。要保证有两个数差为9，它们必然属于同一余数组。所以最坏情况是从每个余数组里取尽量多的数，但避免取到差为9的数对。在同一余数组内，数两两之差是9的倍数，最小差值为9。所以要避免差9，必须间隔着取。例如余1组：1,10,19,...,100。最多可以取1,19,37,55,73,91,100? 需要计算。更简单方法：考虑“鸽巢”为上述按差9分组形成的“数对”或“链”。最经典分法：

{1,10,19,28,37,46,55,64,73,82,91,100}，{2,11,20,29,38,47,56,65,74,83,92}，...，{9,18,27,36,45,54,63,72,81,90,99}。共9个组，前两组12和11个数，后几组11个数。要在同一组内不取到差9的数，最多只能取每组中编号为奇数的位或偶数的位。对于12个数的组，最

多可取6个；对于11个数的组，最多可取6个（例如取第1,3,5,7,9,11个）。所以最多可取 $6+6\times 8=54$ 个数而保证没有两数差9。因此取55个数就能保证。答：55个。

【奥数挑战答案】

答案： 18个。**解析：** 数列通项为 $3n+1$，最后一项100。和104的数对：(4,100), (7,97), ..., (49,55)。共 (49-4)/3 + 1 = 16对。把每一对看作一个“抽屉”，再加上不能配对的数（如1, 52等？实际上1+?=104无解，52+?=104无解）。关键：构造最坏情况是尽量不取到同一对。先取所有不能配对的数，再在每个“抽屉”对中只取一个数。需要计算总数。更稳妥方法：考虑除以...另一种思路：任意两数和为104，意味着它们的平均数是52。所以配对是围绕52对称的：(4,100), (7,97), ..., (49,55), (52单独)。总共有16对和一个孤数52。最坏情况取这16对中每对的一个数，以及孤数52，共 $16+1=17$ 个数，此时没有任何两数和104。再取第18个数，必然来自某一对，与已取的那个数配成和为104。所以至少取18个。

答案： 证明。**解析：** 把4×7方格按列分成6个2×2的“田”字块（第1、2列；第2、3列；...；第6、7列）。每个田字有4格。染色时，每个田字左上角小方格有2种颜色选择。对于相邻两列（如第1、2列）的第一行两个格子，它们颜色组合有4种：(黑,黑), (黑,白), (白,黑), (白,白)。这4种组合看成4个抽屉。现在看第一行，有7列，相当于有6个相邻格子对。把每个格子对的颜色组合看作物体放入4个抽屉。$6\div 4=1\cdots 2$，至少有一个组合出现2次。假设这个组合是(黑,黑)。那么出现这个组合的两对，它们所在的列就构成了一个四角同黑的田字形。其他组合同理。

答案： 51个。**解析：** 构造50个“抽屉”：{1}, {2,4,8,16,32,64}, {3,6,12,24,48,96}, {5,10,20,40,80}, ..., {奇数, 奇数的2倍, 4倍...}。实际上，每个数可以写成 奇数 $\times 2^k$ 的形式（k≥0）。我们按其中的“奇数部分”分组，例如奇数1对应一组：1,2,4,8,16,32,64；奇数3对应一组：3,6,12,24,48,96；...；奇数99对应一组：99。共50组（1~100有50个奇数）。每组内的数都是倍数关系。要保证取出的数中没有倍数关系，最坏情况是从每组中只取最小的那个数（即奇数本身），这样可取50个数而没有倍数关系。取第51个数时，必然落入某一组，与该组已取数成倍数关系。

答案： 证明。**解析：** 构造10个“抽屉”：按除以10的余数0~9分组。10个数，和101。如果每个余数最多出现一次，则余数0~9的和是 $0+1+...+9=45$，但实际总和101，相差56，不可能。所以至少有一个余数出现至少两次，这两个数的差是10的倍数。但题目要求差是10，不一定。需要更精细分析。考虑鸽巢原理：设这10个数为 $a_1<a_2<...<a_{10}$。构造9个差：$a_{10}-a_1, a_{10}-a_2, ..., a_{10}-a_9$。这些差都在1到100之间。如果其中有一个差是10的倍数，比如 $a_{10}-a_k=10m$，则 a_{10} 和 a_k 除以10同余。但并不能保证差就是10（可能是20,30...）。另一种思路：反证法。假设任意两数差都不是10。那么数列中不能同时出现x和x+10。把1~101（因为和101，最大数可能接近101）按模10分成10组。每组最多取1个数（否则差是10的倍数，可能为10,20...）。但这样最多取10个数，且总和最大是取每组最大的数，但和可能超过101？计算：取91,92,...,100,101？但这样组数不够。实际上，如果差不能是10，那么在“差

10”的链上只能取一个。如1,11,21,31,... 最多取一个。这样总数最多是10（从10个余数类中各取一个），但此时总和最小是0+1+...+9=45，最大是90+91+...+99=945，我们的和是101，有可能。例如取1,2,3,4,5,6,7,8,9,56，和=101，且任意两数差没有10？检查：56-9=47，符合。所以反例存在？题目似乎有误。经典结论是“至少有两个数的差是9”，而不是10。对于和101，差10的结论不恒成立。

答案： 证明。**解析：** 将圆分成6个全等的扇形（中心角60度）。7个点放入6个扇形，至少有一个扇形内有2个点。在同一扇形内，两点最大距离为扇形的弦长，当两点在扇形边界上且距离最远时，弦长等于半径=1（如果是正三角形边长为1，但弦长可能小于等于1？）。实际上，中心角60度的扇形，弦长最大是半径（当两点在半径上），但两点都在边界时，最大距离是1（当两点在两条半径端点）。所以距离不超过1。

答案： 42张。**解析：** 最坏情况：先摸出大小王2张，然后每种花色各摸出3张（共 $4 \times 3 = 12$ 张）。此时已摸 $2 + 12 = 14$ 张，尚无4张同花色。再摸任意1张（第15张），都会使某种花色达到4张。但注意，大小王是否算作一种特殊“花色”？通常抽屉原理题中，大小王算作不同花色或无花色。最坏情况可以先把大小王摸出，再平均分配四种花色。所以答案是 $2 + 4 \times 3 + 1 = 15$ 张？经典答案是：去掉大小王，52张牌保证4张同色需要 $4 \times 3 + 1 = 13$ 张。加上大小王，最坏情况大小王都在，仍需13张其他牌，共15张。但仔细想：最坏情况也可以是先摸出13张牌，每种花色3张，加一张大小王（比如1张），共14张，没有4张同色。再摸一张（第15张），如果是另一张王，还是没4张同色。所以14张时可能没达成。所以需要更坏：把两张王都摸出，且四种花色各3张，共 $2 + 12 = 14$ 张，无4张同色。第15张必为某种花色，使其成4张。所以答案是15。但常见奥数题答案可能是42张？那是考虑“至少4张点数相同”。本题是“花色相同”，应是15张。

答案： 证明。**解析：** 构造50个“抽屉”：{1,51}, {2,52}, ..., {50,100}。取51个数，至少有两个数落入同一对，它们的差是50。

答案： 17个。**解析：** 抽屉为4种颜色。要保证5个同色，最坏情况每种颜色先摸4个，共 $4 \times 4 = 16$ 个。再摸第17个，无论什么颜色，都有5个同色。

答案： 证明（拉姆齐定理R(3,3)=6）。**解析：** 任选一人A。其余5人中，与A认识的人至少有3个，或与A不认识的人至少有3个（由抽屉原理，$5 \div 2 = 2 \cdots 1$）。若与A认识的人至少有3个（设为B,C,D）。如果B,C,D中有两人互相认识，则这两人与A构成互相认识的三人组；如果B,C,D三人互不认识，则他们就是互不认识的三人组。另一种情况（与A不认识的人至少有3个）同理可证。

答案： 27个。**解析：** 和为102的数对：(3,99), (5,97), ..., (49,53)。以及单独的数1和51？实际上1+101=102，但101不在列中；51+51=102，但只有一个51。所以数对有：(3,99), (5,97), ..., (49,53)。共 (49-3)/2 + 1 = 24对。还有孤数1和51。最坏情况：取所有24对中每对的一个数，以及两个孤数1和51，共 $24 + 2 = 26$ 个数，此时没有任何两数和102。再取第27个数，必然来自某一对，与已取数配成和为102。

【生活应用答案】

$650 \div 8 = 81 \cdots 2$，$81 + 1 = 82$ (人)。至少有一节车厢人数不低于82人。

$37 \div 12 = 3 \cdots 1$，$3 + 1 = 4$ (份)。

抽屉为4类垃圾。保证同一类识别至少3次，最坏情况每类先识别2次，需 $4 \times 2 = 8$ 次。第9次识别无论何类，都会使该类达到3次。答：至少投入9件垃圾。

抽屉为5个大类。保证有一个大类推荐了2天，最坏情况每天推荐不同大类，连续5天各推荐1次。第6天无论推荐何类，都会使该类达到2天。答：至少连续浏览6天。

这是“保证至少有一栋楼居民能全部检测”，即“该楼人数≤试剂管数”。最坏情况是让每栋楼的人数都刚好比试剂管数多1人，从而无法保证。设每管试剂管可测1人，准备x管试剂。最坏情况是每栋楼都有 $x + 1$ 人，那么总人数为 $20 \times (x + 1)$。但实际总人数未知，我们只能假设居民任意分布。要保证无论怎么分布，都至少有一栋楼人数≤x。反过来说，如果所有楼人数都 $\geq x + 1$，那么总人数 $\geq 20(x + 1)$。所以，只要总人数 $< 20(x + 1)$，就不能迫使所有楼人数都 $\geq x + 1$，即至少有一栋楼人数 $\leq x$。已知总试剂管数400，即总检测能力为400人。我们希望这个能力能满足“至少有一栋楼能全测”的条件，即对于任意分布，都存在一楼人数≤x。考虑最极端的分布：让19栋楼的人都尽量少（比如0人），所有人都挤到一栋楼。那么该楼人数可达400。此时x必须≥400才能保证该楼能全测。但这样其他楼就没人了，也满足“至少有一栋楼能全测”(因为其他楼0人也满足人数≤x)。所以x只需要≥最大可能单楼人数？不，我们要应对的是“无论怎么分布”。最坏的分布是让所有楼的人数尽可能平均且都刚好超过x。即，如果每栋楼人数都为 $\lfloor 400/20 \rfloor = 20$ 人，那么x=20即可（每楼人数≤20)。但如果分布不均，可能有一楼21人，其他楼19人等。要保证总有一楼人数≤x，x必须至少是“平均楼人数”。因为如果所有楼人数都>x，那么总人数>20x。所以只要20x ≥ 总人数（400)，即 $x \geq 20$，就可以保证不可能所有楼人数都>x（否则总人数>400)。因此，x最小取20。街道办至少需要准备 20 管试剂？但一管测一人，20管只能测20人，而总人数400，这似乎矛盾。仔细思考：题目说“至少有一栋楼的居民能全部完成检测”，意思是分配给该楼的试剂管数足够测该楼所有人。我们假设试剂是通用可调配的，不是固定分给每栋楼。那么，我们需要保证的是：存在一种分配方案，使得至少一栋楼分到的试剂管数不少于其人数。在最坏的人口分布下，我们需要多少总试剂管数T？考虑反证：如果对于某种分布，每栋楼的人数都 > 分到的管数，那么总人数 > 总管数T。所以，只要总管数T ≥ 总人数N，就一定能找到一种分配使得至少一栋楼满足。但这里N=400，T=400，似乎够了。但题目问的是“至少需要准备多少管试剂？”这个T应该是一个数，使得对于任意可能的居民分布（总人数不超过某个值？题目没说总人数)，都能保证。题目条件“准备了400管试剂”可能是一个干扰，实际总人数未知。可能意思是：有20栋楼，居民总数未知，如何准备试剂能保证“至少有一栋楼可以全测”。这需要知道居民总数上限。如果居民总数是M，那么最坏情况是居民尽量平均分布，使得每栋楼人数都刚刚超过某个值。要保证至少一栋楼人数≤x，需要 $M \leq 20x$。所以 $x \geq \lceil M/20 \rceil$。但题目没有给出M，只给出了准备的试剂管数400。可能400就是总检测能力，即M≤400。那么 $x \geq \lceil 400/20 \rceil = 20$。所以，只要确保每栋楼分配20管试剂，那么无论居民怎么

分布在20栋楼里，总有一栋楼人数不超过20（因为如果都超过20，总人数>400）。因此，街道办至少需要准备 $20 \times 20 = 400$ 管试剂？这成了一个循环。或许更合理的解释是：试剂是分配到楼栋的，我们需要决定每栋楼分配多少管（设每栋楼分配 k 管），使得在任何分布下，总有一栋楼的人数 ≤ 该楼分配的管数 k。如果每栋楼分配相同的管数 k，那么条件就是：居民总数 $N \leq 400$，且 $k \geq \lceil N/20 \rceil$。为了应对最坏的分布（居民完全平均），我们需要 $k \geq \lceil N/20 \rceil$。但N最大为400，所以 $k \geq 20$。因此，每栋楼至少分配20管，总共需要 $20 \times 20 = 400$ 管。所以答案就是400管。但题目问“至少需要准备多少管试剂？”如果试剂可以动态分配，不预先固定每栋楼的数量，那么只需要准备20管（因为可以只测那一栋楼的人）。但这不合理。结合生活实际，通常是按楼栋大致分配。所以此题可能意在理解平均分和最坏情况。答：400管（按每栋楼20管平均分配，可保证）。但更符合抽屉原理的解法是：把400管试剂看成物体，20栋楼看成抽屉，$400 \div 20 = 20$，所以至少有一栋楼分配到的试剂不超过20管。但这不能推出该楼人数≤20。我们需要的是“人数≤管数”。所以需要反过来想：人数是物体，楼是抽屉，总人数≤400，$400 \div 20 = 20$，所以至少有一栋楼人数不超过20。那么只要给这栋楼分配不少于20管的试剂即可。但我们需要预先分配，不知道是哪栋楼。所以为了保证，必须给每栋楼都分配至少20管试剂（因为最坏情况是人数最多的楼恰好是分配试剂最少的楼）。所以总共需要 $20 \times 20 = 400$ 管。答：400管。

更多练习题

奥数-应用题-页码数数

12-19

奥数-应用题-年龄差不变

12-19

奥数-应用题-还原问题

12-19

奥数-应用题-浓度十字交叉

12-19

奥数-应用题-浓度稀释

12-19

奥数-应用题-工程周期

12-19