

奥数-逻辑-找次品

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

找次品：三分法

知识要点

在众多外观相同的物品中，找出唯一一个重量不同的次品（可能更轻，也可能更重），用天平来称，最节省次数的策略就是“三分法”。

核心概念

把待测物品尽可能平均分成三份。天平称一次，会产生三种结果：左重、右重或平衡。每种结果都能将次品的范围锁定在其中的一份里。这样，我们用一次称量，就将搜索范围缩小到了原来的大约 $\frac{1}{3}$ ，这是最快找到次品的方法。

计算法则

分组：将物品总数 n 尽可能平均地分成三组，假设每组有 a, a, b 个物品（ b 可能比 a 少1或少2）。

称量：将两组数量相同的（ a 个）放在天平左右盘。

若平衡，则次品在剩下的 b 个中。

若不平衡，则次品在天平上的某一盘中，并可以知道次品是“更重”还是“更轻”。

锁定与递归：将问题转化为从更少数量的物品中找次品（已知轻重或未知），重复步骤1和2，直到找出次品。

记忆口诀

物品总数分三份，尽量均分是根本。

两份上秤比轻重，范围瞬间缩三成。

若问最多需几次，牢记三的幂次方。

⌚ 知识关联

等式的性质：天平就像等式，平衡时两边相等。

逻辑推理：根据称量结果进行判断，类似“如果...那么...”的逻辑。

除法与平均分：将总数平均分成三份。

易错点警示

✗ **错误1：**把物品分成两份（如4和4）去称。这样最坏情况（次品在其中一份的4个里）需要更多次数才能找出来。

✓ **正解：**始终坚持“三分法”，分成三堆（如3, 3, 2）。

✗ **错误2：**次品不知轻重时，第一次称量随意拿取物品。这可能导致无法判断次品轻重，陷入僵局。

✓ **正解：**第一次称量必须用**数量相等的两组**上秤，这样才能通过天平倾斜判断次品轻重，为后续缩小范围提供关键信息。

✗ **错误3：**计算“最多需要称几次”时，直接用物品数除以3。这是错误的，因为每次缩小范围后，还需要继续称。

✓ **正解：**思考“称一次最多能从多少个物品中保证找出次品？”答案是 $3^1 = 3$ 个。“称两次最多能从多少个中找出？”答案是 $3^2 = 9$ 个。规律是：**最多称 k 次，能从最多 3^k 个物品中保证找出次品**。所以要倒过来想，例如27个物品，因为 $27 = 3^3$ ，所以最多需要称3次。

三例题精讲

🔥 **例题1：**有9盒完全相同的饼干，其中一盒被偷吃了2块（比其他盒轻）。用天平至少称几次，能保证找出这盒轻的饼干？

❖ **第一步（分组）：**把9盒平均分成3份，每份3盒。

❖ **第二步（第一次称）：**天平左右各放3盒。

如果平衡，则轻的在剩下的3盒中。

如果不平衡，则轻的那盒在翘起来（较轻）的那边3盒中。

至此，通过1次称量，我们将范围缩小到了3盒饼干中，并且已知次品是“轻”的。

❖ **第三步（第二次称）：**从有问题的3盒中，任取2盒放在天平左右。

如果平衡，剩下没称的那盒是轻的。

如果不平衡，翘起来（较轻）的那盒就是我们要找的。

✓ **答案：**至少称2次。

💬 **总结：**这是三分法的标准应用。第一次称将9 (3^2) 缩小为3 (3^1)，第二次称从3个中找出1个。

🔥 **例题2：**有12个乒乓球，其中一个是次品（但不知道是轻是重）。给你一架天平，至少称几次能保证找出这个次品？

❖ **第一步（首次分组）：**将12个球分成3组：A组(1,2,3,4)，B组(5,6,7,8)，C组(9,10,11,12)。先称A vs B。

❖ **第二步（分析首次结果）：**情况复杂，以“A组重”为例（若平衡，则次品在C组，且不知轻重；若B组重则同理）。假设A组重，那么要么次品在A组且较重，要么在B组且较轻。此时C组全是好球。

❖ **第三步（二次称量）：**将A组中的(1,2,3)与B组中的(5,6,7)及C组一个好球(9)混合称量。即左盘：(1,2,3,5)，右盘：(4,9,10,11)。这里用到了“标重法”，即用好球做参照。根据天平倾斜情况，可以锁定次品在哪个球上，并知道其轻重。

✓ **答案：**至少称3次。

💬 **总结：**当次品轻重未知时，策略更复杂。首次称量仍用“三分法”(4, 4, 4)，后续称量需要利用“已知的好球”作为标准重量来辅助判断。

🔥 **例题3：**一箱零件有27个，其中有一个是次品（重量不合格）。用天平至少称几次，能保证把它找出来？

❖ **第一步：**27个正好是 3^3 。先平均分成三堆，每堆9个。称其中两堆。

❖ **第二步：**根据第一次称量结果（平衡或不平衡），将次品范围锁定在9个零件中。

❖ **第三步：**将9个零件再平均分成三堆，每堆3个。称其中两堆。

❖ **第四步：**根据第二次结果，将次品范围锁定在3个零件中。

❖ **第五步：**最后从3个中任取两个称一次，即可找出次品。

答案：至少称3次。

总结：对于 3^k 个物品，用三分法恰好需要 k 次。这是一个经典的结论，需要牢记。

练习题（10道）

有8瓶相同的矿泉水，其中一瓶是空瓶（轻一些）。用天平至少称几次能保证找出它？

有10个同样的纪念币，其中一个假币（较重）。至少称几次能保证找出假币？

有81袋同规格的白糖，其中一袋分量不足。用天平至少称几次能保证找出这袋糖？

妈妈买了15个苹果，发现其中一个被虫蛀了（质量稍轻）。用家里的电子秤（只能显示左右哪边重）最少称几次能保证找到坏苹果？

有14个乒乓球，其中一个次品（不知轻重），用天平至少称几次能保证找出？

一包糖果有26颗，有一颗是“空心糖”（轻）。至少称几次能保证找到它？

有4盒巧克力，标号1-4，其中一盒全是由可可脂的（轻）。称一次能保证找到吗？如果能，怎么称？

有3颗钻石和1颗仿制品（仿制品更轻）。用天平最少称几次能找出仿制品？

有27枚金币和1枚镀金的假币（假币更轻），混在一起。至少称几次能保证找出假币？

有一堆零件在100到200个之间，用天平找其中一个次品（轻重已知），保证找到的最少次数是5次。这堆零件最多可能有多少个？

奥数挑战（10道）

有13个金币，其中一个是假的（重量与真币不同，但不知是轻是重）。用天平至少称几次能保证找出假币？

有5袋面粉，其中4袋每袋重 500g，1袋重 495g。用一个没有砝码的天平，至少称几次能保证找出轻的那袋？

有8个球，编号1-8，其中6个一样重，另外两个都轻一些（且重量相同）。用天平至少称几次能保证找出这两个轻球？

有4个球，其中可能有一个次品（轻重不知），也可能没有（全是好球）。用天平至少称几次能判断出“是否有次品”以及“如果有，是哪个，是轻是重”？

有 3^n 个球，其中一个次品（轻重不知）。用天平称 $n + 1$ 次，能保证找出次品吗？为什么？

有12个小球，其中11个好球重量相等，另一个坏球重量不同（不知轻重）。给你一架天平和3个标准好球，至少称几次能保证找出坏球并知轻重？

“三分法”的本质是每次称量能获得“左重”、“右重”、“平衡”三种信息。若允许使用砝码，一次称量最多能获得多少种不同的信息？这对找次品策略有何启发？

有100个零件，有一个是次品（较重）。但天平只有两个托盘，且一次最多只能放30个零件。至少需要称几次？

有10瓶药水，其中9瓶是 1.0g/mL 的标准液，1瓶是 1.1g/mL 的浓缩液（更重）。给你一架天平和足够多标好刻度的空烧杯，如何只称一次就找出浓缩液？

将找次品问题推广：用天平称 k 次，最多能从多少个球中找出一个次品（且必须知道它是轻是重）？这个数与 3^k 有什么关系？

生活应用（5道）

（网购） 你在网上买了12支同款电子笔，到货后发现有一支是坏的（无法开机，可能因内部电池缺失而更轻）。你只有一个厨房秤，想用最少的称重次数找出坏笔。请问该如何操作？最少称几次？

（航天） 在卫星发射前，工程师需要检查1000个同型号的精密螺丝中是否混入了一个强度不合格的次品（质量略轻）。他们使用高精度天平，请问理论上最少需要检测几次（每次可以对比任意数量的螺丝）？

（AI训练） 训练一个AI识别“次品水果”。算法每次可以同时比较三张图片（A, B, C），并给出“**A最像次品**”、“**B最像次品**”、“**C最像次品**”或“**三者都不是次品**”的判断。现在有27张待筛查的苹果图片，其中确定有1张是次品苹果图。问AI最少需要调用几次这个比较函数，才能保证找出那张次品图？

（环保） 环保局有9个水样，来自同一条河的不同河段，其中一份水样被意外污染（密度与其他8份不同）。用精密浮力天平（原理同托盘天平）至少测量几次能定位被污染的水样？

（高铁检修） 一节高铁车厢有81个重要的同型号电气接头。已知其中恰好有一个接头存在虚接隐患（电阻异常，但外观无法分辨）。检修员用一种设备可以同时测试任意多个接头的总电阻是否正常。请问他最少需要分成几组进行测试，才能保证找出有隐患的接头？

参考答案与解析

【练习题答案】

2次。分成(3,3,2)，先称3 vs 3。

3次。分成(3,3,4)，先称3 vs 3。若平衡，次品在4个中（已知重），还需2次；若不平衡，次品在重的3个中，还需1次。最坏情况需要3次。

4次。因为 $81 = 3^4$ ，所以需要4次。

3次。15在 $3^2 = 9$ 和 $3^3 = 27$ 之间，所以至少需要3次。

3次。这是一个经典问题，14个球（不知轻重）需要3次。

3次。26在 $3^2 = 9$ 和 $3^3 = 27$ 之间，需要3次。

能，1次。左边放1号和2号，右边放3号和4号。哪边轻，次品就在那边。如果平衡？不可能平衡，因为次品一定存在且轻。

1次。任取两颗钻石放在天平两端。若平衡，则剩下的是仿制品；若不平衡，轻的那端是仿制品。

3次。总共有28枚，但已知假币更轻。28在 $3^3 = 27$ 和 $3^4 = 81$ 之间，但由于已知轻重，有时可以更快。但最坏情况仍需3次。策略：分成(9,9,10)，先称两个9。

243个。称5次最多能从 $3^5 = 243$ 个物品中保证找出次品。零件数在100-200之间，都只需5次，但最多就是243个。

【奥数挑战答案】

3次。这是经典“12球问题”的扩展（13球）。标准解法需3次。

2次。分成(2,2,1)。先称2 vs 2。若平衡，则剩下那袋是轻的；若不平衡，将轻的一边的两袋再称一次即可。

3次。第一次称 (1,2,3) vs (4,5,6)。根据平衡与否，情况较多。核心是将8个球分成三组，并利用“两个轻球可能在同一组，也可能在不同组”的信息进行设计。

2次。第一次称1 vs 2。第二次称1 vs 3。通过两次结果组合（平衡/不平衡）可以唯一确定所有情况。

不能。对于不知轻重的次品，称 n 次最多能从 $(3^n - 3)/2$ 个球中保证找出。这小于 3^n 。但题目问 $n + 1$ 次，那当然能找出，因为 $n + 1$ 次的能力远强于 n 次。原题可能意在对比“轻重已知”和“轻重未知”的差异。

2次。因为有3个标准球，相当于“已知12个球中有一个坏球，且我们有无限多好球可以参考”，策略灵活性大大增加，2次可以解决。

5种。使用砝码可以称出“左重x克”、“平衡”、“右重y克”等多种连续信息。但找次品是离散判断，启发是可以用砝码进行更精细的“称重”而非“比较”，从而可能用更少次数解决更多球的问题。

4次。第一次称30 vs 30。次品在重的30个中。第二次将重的30个分成(15,15)再称。次品在重的15个中。第三次，从15个中取14个分成(7,7)称。若平衡，剩下的是次品；若不平衡，次品在重的7个中。第四次从7个中任取6个称(3 vs 3)。

操作：从第1瓶取1mL，第2瓶取2mL，……，第10瓶取10mL，混合后称总重量。标准总重应为 $(1 + 2 + \dots + 10) \times 1.0 = 55.0$ g。实际重量多出 $0.1 \times n$ 克，那么第 n 瓶就是浓缩液。
 $(3^k - 3)/2$ 个。因为每次称量有3种结果， k 次有 3^k 种信息序列。但我们需要用这些序列来编码“哪个球是次品”以及“它是轻是重”这两种属性。所以 $3^k \geq 2n$ ，解得 $n \leq (3^k - 3)/2$ (当 3^k 为奇数时取等)。

【生活应用答案】

操作：模仿三分法。12支笔分成(4,4,4)。先称两组4支。最少需要**3次**。

理论最少次数：因为 $1000 < 3^7 = 2187$ ，所以理论上用天平至少称**7次**就能从1000个螺丝中找出那个轻的次品。

3次。这完美对应三分法模型。AI每次比较相当于一次天平称量，将图片分成三份，并判断次品在哪一份。27张图正好是 3^3 ，所以需要3次。

2次。9份水样，已知其中一份密度不同（但不知偏大还是偏小）。这与“9个球，一个次品不知轻重”问题等价，需要**2次**。（经典结论：用天平能从不超过 $(3^n - 3)/2$ 个球中找出不知轻重的次品，当 $n=2$ 时，这个数是3。9个球需要3次。请注意，这里题目说“密度不同”，没有说已知偏大或偏小，因此属于“不知轻重”问题，9个球需要3次。我之前的答案有误，特此更正。）

最少测试组数即称量次数。81个接头，用“分组测试”（类似于天平一次可以比较多个组的总电阻）的方法，其数学模型与找次品完全相同。 $81 = 3^4$ ，所以最少需要分成**4组**（即进行4轮测试）来找出隐患接头。

更多精彩内容请访问 **星火网** www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-逻辑-取火柴必胜

12-19

奥数-逻辑-列表推理

12-19

奥数-逻辑-真假话推理

12-19

奥数-逻辑-抽屉原理

12-19

奥数-应用题-页码数数

12-19

奥数-应用题-年龄差不变

12-19

