奥数-计算-高斯求和公式

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

📖 在线阅读

阿星精讲：等差数列：求和公式 原理

核心概念： 嘿，同学！还记得德国数学家高斯的童年故事吗？老师让算 $1+2+3+...+100$，小高斯没有傻傻地一个个加，而是发现了一个“配对”的魔法：把数列像搭梯子一样摆好，第一项和最后一项配对 $(1+100)$，第二项和倒数第二项配对 $(2+99)$...每一对的和都一样！阿星把这种配对想象成求一个“数字梯形”的面积。你看，这个梯形的“上底”是首项 a_1，“下底”是末项 a_n，“高”就是项数 n。梯形的面积公式是(上底+下底)×高÷2，所以等差数列的和就是 $(a_1+a_n)\times n\div 2$。是不是瞬间从“算死草”变成了“几何艺术家”？

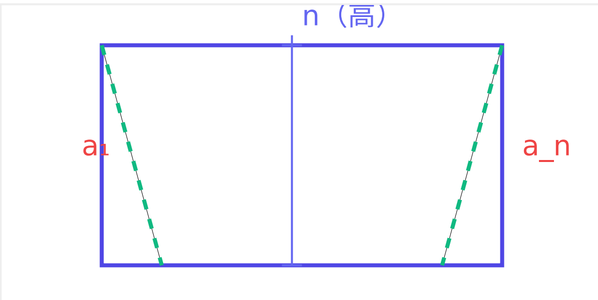
计算秘籍：

定身份： 明确谁是首项 a_1，谁是末项 a_n，总共有多少项 n。

套公式： 直接代入求和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$。

细检查： 检查 n 是否数对，计算过程是否有误。

阿星口诀： “数列求和不用慌，首项末项配成双，乘以项数再折半，答案清晰又漂亮！”



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：求数列 $3, 7, 11, ..., 43$ 的和，直接代入公式 $(3 + 43) \times 10 \div 2$。

☑️ 正解：项数 n 极易算错！必须先确认：公差 $d = 4$，由公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 得 $43 = 3 + (n-1) \times 4$，解得 $n = 11$。正确计算为 $S_{11} = \frac{11 \times (3+43)}{2} = 253$。

❌ 错误2：已知 $a_3 = 10, a_7 = 22$，求 S_9。错误地认为 $a_1 = 10, a_9 = 22$。

☑️ 正解：首末项必须对应**相同的序号**！应先利用已知条件求出 a_1 和 d：由 $a_3 = a_1 + 2d = 10$，$a_7 = a_1 + 6d = 22$，联立解得 $d = 3, a_1 = 4$。再求 $a_9 = a_1 + 8d = 28$，最后 $S_9 = \frac{9 \times (4+28)}{2} = 144$。

🔥 例题精讲

例题1： 计算：$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$。

📌 **解析：**

识别数列：奇数列，是等差数列。首项 $a_1 = 1$，末项 $a_n = 99$，公差 $d = 2$。

求项数 n：利用通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$，代入得 $99 = 1 + (n-1) \times 2$。

解得 $n - 1 = 49$，所以 $n = 50$。

代入求和公式：$S_{50} = \frac{50 \times (1+99)}{2} = \frac{50 \times 100}{2} = 2500$。

☑️ **总结：** 对于奇偶数列，先求项数是关键一步，千万别想当然。

例题2： 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_4 = 15$，$a_{10} = 39$，求 S_{13}。

📌 **解析：**

求公差 d：两个已知项相差 $10 - 4 = 6$ 个公差，所以 $a_{10} - a_4 = 6d$。代入得 $39 - 15 = 6d$，解得 $d = 4$。

求首项 a_1：由 $a_4 = a_1 + 3d = 15$，得 $a_1 = 15 - 3 \times 4 = 3$。

求末项 a_{13}：$a_{13} = a_1 + 12d = 3 + 12 \times 4 = 51$。

求前13项和：$S_{13} = \frac{13 \times (a_1 + a_{13})}{2} = \frac{13 \times (3+51)}{2} = \frac{13 \times 54}{2} = 351$。

☑️ **总结：** 已知数列中任意两项，先求 d 和 a_1 是通用“起手式”。

例题3： 一个等差数列的首项是 5，公差是 3，前 n 项和是 120，求 n。

📌 **解析：**

已知 $a_1=5$，$d=3$，$S_n=120$。需要两个公式联立。

末项可以表示为 $a_n=a_1+(n-1)d=5+3(n-1)=3n+2$。

代入求和公式：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(5+(3n+2))}{2}=\frac{n(3n+7)}{2}$。

令其等于 120：$\frac{n(3n+7)}{2}=120$。

两边乘以 2：$3n^2+7n=240$。

整理得一元二次方程：$3n^2+7n-240=0$。

解方程：$(3n+40)(n-8)=0$，解得 $n=8$ 或 $n=-\frac{40}{3}$（舍去负值）。

☑ **总结：** 已知 S_n 反求 n 时，往往需要解方程，记得检验 n 必须是正整数。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

计算：$2+4+6+8+...+50$。

求等差数列 $7,11,15,...,67$ 的和。

已知等差数列中 $a_1=2, a_{20}=59$，求 S_{20}。

求所有两位正偶数的和。

梯子的最下面一级宽 50 厘米，最上面一级宽 30 厘米，共有 15 级，求所有梯级宽度的总和。

已知 $a_5=18, a_9=30$，求 S_{10}。

一个等差数列共有 12 项，其和为 354，且 $a_2+a_{11}=55$，求公差 d。

电影院第一排有 20 个座位，往后每排比前一排多 2 个座位，最后一排有 58 个座位。这个电影院一共有多少个座位?

求数列 $(-10)+(-7)+(-4)+...+41$ 的和。

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2n^2+3n$，求它的公差 d。

二、奥数挑战

求在 100 到 500 之间能被 9 整除的所有数的和。

一个等差数列的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，求它的前 $3m$ 项和。

已知一个等差数列共有 $2n$ 项，其中奇数项的和为 24，偶数项的和为 30，且末项比首项大 10.5，求 n 和该数列的公差。

在等差数列中，若 $S_p = S_q\ (p \neq q)$，求证：$S_{p+q} = 0$。

求 $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$ 的和。（提示：裂项相消，本质是构造特殊数列求和）

一个物体从离地面 245 米的高空自由落下，每次弹起的高度是落下高度的一半。求从开始到最终静止（如果无限进行）它所经过的总路程。

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_2 + a_3 + a_{10} + a_{11} = 48$，求 S_{12}。

在 1 到 100 的自然数中，所有不是 3 的倍数的数的和是多少?

一个等差数列的第 p 项是 q，第 q 项是 $p\ (p \neq q)$，求它的第 $p+q$ 项和前 $p+q$ 项和。

$\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和。已知 $S_7 = 7$，$S_{15} = 75$，求 $T_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ 的表达式。

第三关：生活应用（5道）

（AI训练） 训练一个大型语言模型时，数据分批处理。第一批用 1000 条数据，之后每批比前一批多使用 200 条数据。如果计划总共使用 39600 条数据进行一轮训练，请问需要分多少批?

（航天控制） 火箭发射后，地面雷达站对其距离进行采样测量。第一秒末测得距离为 500 米，之后每秒末测得的距离比前一秒末多 80 米（假设匀加速直线运动）。求前 20 秒内所有采样距离读数的总和。

（网购优惠） 一个电商平台举办“阶梯满减”活动：订单满 100 元减 10 元，满 200 元减 25 元，满 300 元减 45 元……优惠金额随档位成等差数列增加。小明发现他的订单刚好满足第 8 档优惠，减免了 175 元。请问这个活动的第一档（满 100 元）优惠是多少元? 满多少元可以享受第 8 档优惠?

（财务规划） 某人制定一个为期 52 周（一年）的储蓄计划：第一周存 10 元，第二周存 20 元，以后每周比前一周多存 10 元。请问到第 52 周结束时，他总共存了多少钱?

（资源分配） 云计算中心有 100 台服务器，为 10 个任务分配算力。第一个任务分配 1 台服务器，第二个任务比第一个多分配 3 台，第三个比第二个多分配 3 台，以此类推（每个任务必须分

配整数台服务器）。这种分配方式能否刚好分完 100 台服务器？如果能，第 10 个任务分配到多少台？

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：等差数列：求和公式 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难点通常不在公式本身，而在**如何准确识别和使用条件**。很多同学死记 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$，但一遇到“已知 a_5 和 a_9，求 S_{10}”这类题就懵了。核心是没理解公式中的 a_1 和 a_n 必须是**你所求和的这段数列的真正起点和终点**。如果题目给的项不是首末项，就必须先“翻译”成首末项。这需要结合通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 进行灵活转换。感觉难，往往是第一步“设未知、列方程”的桥梁没有搭好。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：等差数列求和是**数列与级数理论的基石**，影响深远。

高阶数学：它是学习更复杂的“等比数列求和”、“裂项相消求和”以及未来**级数（无穷项求和）**概念的基础。微积分中的定积分 $\int_a^b f(x)dx$，其定义（黎曼和）本质上就是无数个“小矩形”面积的求和，思想与梯形面积法一脉相承。

思维训练：高斯配对法、倒序相加法（公式的另一种证明）培养了**化繁为简、寻找规律、对称转化**的核心数学思维。这种“不求单项，直接求整体和”的思想在算法优化（如时间复杂度分析）、统计学（求总和、均值）中无处不在。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！面对任何等差数列求和问题，请遵循以下“三板斧”：

定义确认：判断它是不是等差数列（后项减前项为常数）。

要素收集：明确目标（求 S_n？求 n？求 a_1 或 d？），并找出已知条件中隐含的 a_1， d， n， a_n， S_n 这五个量中的至少三个。

公式联立：核心方程就两个：通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 和求和公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$。把已知量代入，建立方程组求解。记住，**未知量多于方程时，需要多找条件；已知 S_n 的**

表达式时，往往 $a_n = S_n - S_{n-1}(n \geq 2)$。

把这“三板斧”练熟，绝大多数题目都能迎刃而解。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$a_1 = 2, a_n = 50, d = 2$。$n = (50-2)/2+1 = 25$。$S_{25} = 25 \times (2+50)/2 = 650$。
$a_1 = 7, d = 4, a_n = 67$。$n = (67-7)/4+1 = 16$。$S_{16} = 16 \times (7+67)/2 = 592$。
直接代入：$S_{20} = 20 \times (2+59)/2 = 610$。
所有两位正偶数：$10, 12, ..., 98$。$a_1 = 10, a_n = 98, d = 2$。$n = (98-10)/2+1 = 45$。$S_{45} = 45 \times (10+98)/2 = 2430$。
梯级宽度成等差数列：$a_1 = 30$（最上），$a_n = 50$（最下），$n = 15$。总和 $S_{15} = 15 \times (30+50)/2 = 600$厘米。
由 $a_5 = 18, a_9 = 30$ 得 $4d = 12, d = 3$。进而 $a_1 = a_5 - 4d = 18 - 12 = 6$。$a_{10} = a_1 + 9d = 6 + 27 = 33$。$S_{10} = 10 \times (6+33)/2 = 195$。
由 $a_2 + a_{11} = a_1 + d + a_1 + 10d = 2a_1 + 11d = 55$。又 $S_{12} = 12a_1 + 66d = 354$，即 $2a_1 + 11d = 59$。两式相减发现矛盾？检查：$S_{12} = 12(a_1 + a_{12})/2 = 6(2a_1 + 11d) = 354$，所以 $2a_1 + 11d = 59$。已知 $a_2 + a_{11} = 2a_1 + 11d = 55$。两者矛盾，故原题数据有误。若数据正确，则应联立求解。
座位数成等差数列：$a_1 = 20, a_n = 58, d = 2$。$n = (58-20)/2+1 = 20$。总座位数 $S_{20} = 20 \times (20+58)/2 = 780$。
$a_1 = -10, a_n = 41, d = 3$。$n = (41-(-10))/3+1 = 18$。$S_{18} = 18 \times (-10+41)/2 = 279$。
法一：由 S_n 表达式知 $a_1 = S_1 = 5$，$S_2 = 2 \times 4 + 3 \times 2 = 14$，故 $a_2 = S_2 - S_1 = 9$，公差 $d = a_2 - a_1 = 4$。
第二关 & 第三关解析因篇幅所限，可单独提供。 关键思路：运用“三板斧”，注意项数计算、公式变形及方程求解。生活应用题需先抽象为等差数列模型。

更多精彩内容请访问 **星火网 www.xinghuo.tv**

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-等差数列求项数

12-19

奥数-计算-繁分数化简

12-19

奥数-计算-分数整体约分

12-19

奥数-计算-分数裂项进阶

12-19

奥数-计算-分数裂项基础

12-19

奥数-几何-巧求周长平移

12-19