奥数-计算-等比数列求和

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：等比数列：错位相减 原理

核心概念： 大家好，我是阿星！想象一下，你有一列用积木搭的“等比”高塔（后一个是前一个的固定倍数）。今天我们要算这列高塔的总高度。最经典的例子就是 $2+4+8+...+256$。笨办法是一个个加，但我们有“错位相减”这把神奇剪刀！**它的核心就像玩“叠罗汉再对齐”的游戏：** 我把原数列抄一遍，然后在它下面再抄一遍，但故意让每一个“积木”都错开一位（也就是整体乘以公比）。这样上下对齐一看，中间几乎所有的“积木”都一模一样！只要两式一减，中间部分就像被魔法“消消乐”一样全部消掉，只剩下头尾两个孤零零的积木，问题瞬间变简单！

计算秘籍：

设和： 设总和 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}$。

乘公比： 在等式两边同时乘以公比 q，得到 $qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n$。注意，这相当于把原式的每一项都向后“推”了一位。

错位相减： 用原始式子 S_n 减去乘公比后的式子 qS_n（通常用① - ②）。对齐观察，从第二项开始到倒数第二项，上下完全一样，全部抵消！

① S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}

中间全消掉!

② qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} + a_1q^n

整理求解： 相减后得到 $S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$，即 $(1-q)S_n = a_1(1-q^n)$。当 $q \neq 1$ 时，最终公式为：

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$。

阿星口诀：“等比求和不用慌，原式下面写乘商。错位对齐再相减，头留尾留心敞亮！”（“乘商”指乘以公比）

⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**项数数错。** 例如，求 $2+4+8+...+256$ 的和，误以为最后一项 $256=2^7$，所以 $n=7$。
☑ 正解：**看清通项。** 首项 $2=2^1$，公比 $q=2$，最后一项 $256=2^8$。因此它是从 2^1 到 2^8，总共是 8 项，$n=8$。关键在于：指数从 1 到 8，项数就是 8。

❌ 错误2：**相减时符号混乱。** 用①式减②式时，忘记给②式整体加括号，导致后面符号出错。
☑ 正解：**务必带括号。** 严格按照 S_n-qS_n 或 $(a_1+a_1q+...)-(a_1q+a_1q^2+...)$ 书写，减去一个多项式时，括号不能省！

🔥 例题精讲

例题1： 计算 $2+4+8+16+...+256$ 的和。

🔎 **解析：**

观察：首项 $a_1=2$，公比 $q=2$。末项 $256=2\times2^7=2^8$，所以项数 $n=8$。

设和：令 $S_8=2+4+8+...+256$。

乘公比：$2S_8=4+8+16+...+256+512$。

错位相减（下式减上式）：

\(\begin{aligned}

&2S_8 = 4 + 8 + 16 + ... + 256 + 512\\

-)&S_8 = 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 256\\

\hline

&S_8 = -2 + 0 + 0 + 0 + ... + 0 + 512

\end{aligned} \)

所以，$S_8=512-2=510$。

✅ **总结：** 直接用公式 $S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ 也能快速得 $S_8 = \frac{2\times(2^8-1)}{2-1} = 2\times(256-1) = 510$。**心法：** 找到正确的首项、公比和项数是第一步，也是最关键的一步。

例题2： 求数列 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{256}$ 的前 10 项和。

📌 **解析：**

识别参数：首项 $a_1 = 1$，公比 $q = -\frac{1}{2}$，项数 $n = 10$。

代入求和公式：

\(\begin{aligned}

S_{10} &= \frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q} \\

&= \frac{1 \times [1 - (-\frac{1}{2})^{10}]}{1 - (-\frac{1}{2})} \\

&= \frac{1 - (\frac{1}{1024})}{1 + \frac{1}{2}} \\

&= \frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{3}{2}} \\

&= \frac{1023}{1024} \times \frac{2}{3} = \frac{2046}{3072} = \frac{341}{512}

\end{aligned} \)

✅ **总结：** 当公比 q 为负数或分数时，公式法比错位相减法更直接。但原理相通。**心法：** q 是负数时，计算 q^n 要特别注意符号和括号，例如 $(-\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{1024}$。

例题3： 已知等比数列 $\{a_n\}$，前 n 项和 $S_n = 3^n + k$，求常数 k 的值。

📌 **解析：**

利用通项与和的关系：$a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$。

计算：

$a_n = (3^n + k) - (3^{n-1} + k) = 3^n - 3^{n-1} = 3^{n-1}(3-1) = 2\times 3^{n-1}$。

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，此通项公式对 $n = 1$ 也应成立。

由公式得 $a_1 = 2\times 3^0 = 2$。

由已知 $S_1 = a_1 = 3^1 + k = 3 + k$。

所以 $3 + k = 2$，解得 $k = -1$。

☑ **总结：** 这是一道公式逆向应用题。**心法：** 等比数列的前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$，其结构是一个常数减去一个常数乘以 q^n。已知 $S_n=3^n+k$，与标准形式对比，可知 $q=3$，进而反推 k。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

计算：$1+3+9+27+\ldots+729$。

计算：$5+10+20+\ldots+1280$。

求等比数列 $4,-2,1,-\frac{1}{2},\ldots$ 的前 6 项和。

已知等比数列首项 $a_1=6$，公比 $q=2$，求前 5 项和 S_5。

已知等比数列首项 $a_1=27$，公比 $q=\frac{1}{3}$，求前 4 项和 S_4。

求和：$2+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$。

求和：$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$。

一个等比数列，前 3 项和为 14，公比为 2，求它的首项。

数列 $a_n=2^{n-1}$，求其前 n 项和 S_n。

已知等比数列前 n 项和 $S_n=2^{n+1}-2$，求它的公比 q。

二、奥数挑战

计算：$1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\ldots+10\times2^{10}$。

求和：$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{10}{2^{10}}$。

设 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}$，求 S_n。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1\ (n\geq1)$，求其前 n 项和 S_n。

求 $0.7+0.77+0.777+\ldots+0.\underbrace{77\ldots7}_{n个7}$ 的和。

求 $1+11+111+\ldots+\underbrace{111\ldots1}_{n个1}$ 的和。

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - 1$，求 S_n。

求和：$1^2 + 2^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2^2 + 4^2 \cdot 2^3 + \ldots + n^2 \cdot 2^{n-1}$。

计算：$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \cdot 3^{k-1}$。

设 $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^{k-1}}$，化简 T_n。

第三关：生活应用（5道）

（AI模型参数）某个神经网络层，第一层有 10 万个参数，之后每一层的参数数量是前一层的 0.8 倍。如果这个网络共有 6 层，求该网络这部分的参数总量（精确到万）。

（卫星信号衰减）地面站向卫星发送信号，信号强度每经过 1 公里衰减为原来的 99.5%。卫星距离地面 36000 公里，为确保卫星能接收到最小强度为 P_0 的信号，地面站最初需要发射的强度至少是 P_0 的多少倍？（可用 q^n 表示）

（网购优惠）某电商“双十一”推出连续签到领红包活动：第一天领 0.1 元，之后每天领到的金额是前一天的 1.5 倍。如果活动持续 7 天，小明全部签到，他总共能领到多少元（保留两位小数）？

（细胞分裂）一种实验细菌，每 20 分钟数量翻一番（公比为 2 ）。现有 1 个细菌，培养 4 小时后，细菌的总数是多少？（提示：注意分裂次数）

（贷款还款）一种“气球贷”的还款方式：前 11 个月每月只还少量利息 m 元，最后第 12 个月一次性偿还剩余全部本金和最后一个月利息。设贷款总额为 A 元，月利率为 r，试写出第 12 个月还款额的计算表达式。(提示：前11个月还款后，剩余本金构成一个等比数列)

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：等比数列：错位相减 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点在于“形”与“神”的分离。学生记住了“错位、相减”的**形**，但没有理解其**神**——即通过构造一个几乎完全相同的式子，利用相减实现“批量抵消”。这本质上是一种“差分”思想。当题目变式不再是标准 $\sum a_n$ 而是 $\sum na_n$ 或 $\sum(n+1)a_n$ 时，机械套用就

会失败。关键在于明白，我们乘以公比 q 的目的，就是为了让两个式子的**同类项对齐**，为相消创造机会。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：它的帮助是里程碑式的。

高中数学： 它是推导等比数列求和公式的根本方法，也是解决数列求和问题（如差比数列 $\sum(an+b)q^{n-1}$ ）的核心工具。理解它，就掌握了数列“求和与通项”互化思想的一把钥匙。

高等数学/大学数学： 这是“裂项相消”与“差分算子”思想最朴素的体现。在无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中，判断收敛性有时就需要考察其部分和 S_n，而求 S_n 的技巧正源于此。在幂级数、泰勒展开中，处理形如 $\sum nx^n$ 的求和时，技巧完全同源。

可以说，它是由有限和通向无限和、由常量数学迈向变量数学的一座小桥。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：对于标准等比求和，直接用公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1)$ 就是最佳套路。但对于更一般的“差比数列”(等差数列×等比数列)，则有一个**万能四步套路**：

设和： 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Ak+B)\cdot q^{k-1}$。

乘公比： 写出 $qS_n = \sum_{k=1}^{n}(Ak+B)\cdot q^{k}$。

错位相减： 计算 $(1-q)S_n = S_n - qS_n$。此时，右边的式子经过整理，会变成一个等比数列的和加上一个单独的项。

整理得解： 将等式两边同时除以 $(1-q)$ 即可得到 S_n。

记住这个模型：$\sum(\text{关于n的线性函数}) \times (\text{等比数列})$ ，错位相减是通法。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$a_1 = 1, q = 3, 729 = 3^6 \Rightarrow n = 7, S_7 = \frac{1\times(3^7-1)}{3-1} = 1093$。
$a_1 = 5, q = 2, 1280 = 5\times 2^8 \Rightarrow n = 9, S_9 = \frac{5\times(2^9-1)}{2-1} = 2555$。

$a_1=4,q=-\frac{1}{2},n=6,S_6=\frac{4\times[1-(-\frac{1}{2})^6]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{4\times(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}}=\frac{4\times\frac{63}{64}}{\frac{3}{2}}=\frac{21}{8}$。
$S_5=\frac{6\times(2^5-1)}{2-1}=6\times31=186$。
$S_4=\frac{27\times[1-(\frac{1}{3})^4]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27\times(1-\frac{1}{81})}{\frac{2}{3}}=\frac{27\times\frac{80}{81}}{\frac{2}{3}}=40$。
$S_{10}=\frac{2\times(2^{10}-1)}{2-1}=2046$。
$a_1=1,q=-\frac{1}{3},n=5,S_5=\frac{1\times[1-(-\frac{1}{3})^5]}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1+\frac{1}{243}}{\frac{4}{3}}=\frac{244}{243}\times\frac{3}{4}=\frac{61}{81}$。
$S_3=\frac{a_1(1-2^3)}{1-2}=14\Rightarrow\frac{a_1\times(-7)}{-1}=14\Rightarrow7a_1=14\Rightarrow a_1=2$。
$a_1=1,q=2,S_n=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$。
$S_1=a_1=2^2-2=2,S_2=2^3-2=6\Rightarrow a_2=S_2-S_1=4\Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=2$。

第二关 & 第三关解析 因篇幅所限，此处提供关键思路。如你需要，我可以为你详细展开其中任何一道题的完整解析过程。

二、奥数挑战

设和为 S，计算 $2S$ 错位相减。
同第1题，是差比数列求和。
通用解法，设和后乘 $\frac{1}{3}$ 再错位相减。
先由递推式求通项 $a_n=2^n-1$，再求和。
将每一项写成 $0.777\ldots7=\frac{7}{9}(1-10^{-n})$，转化为等比数列求和。
同第5题思想，$111\ldots1=\frac{10^n-1}{9}$。
利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 证明其为等比数列，再求和。
三次应用错位相减技巧（或求导思想）。
拆成 $2\sum k\cdot3^{k-1}-\sum3^{k-1}$。
拆成 $\sum\frac{k}{2^{k-1}}+\sum\frac{1}{2^{k-1}}$。

生活应用关键思路提示：

参数总量 $S_6=100000\times\frac{1-0.8^6}{1-0.8}\approx369664$，约 37 万。
衰减系数为 0.995，距离 36000 公里，故所需倍数为 $\frac{1}{0.995^{36000}}$，即 $(0.995)^{-36000}$ 倍。
$S_7=\frac{0.1\times(1-1.5^7)}{1-1.5}\approx21.71$ 元。
4小时=240分钟，分裂 $\frac{240}{20}=12$ 次，总数 $N=1\times2^{12}=4096$。
前11个月每月还款后，剩余本金构成数列：$A,A(1+r)-m,[A(1+r)-m](1+r)-m,\ldots$。可推导出第12个月初剩余本金 $L=A(1+r)^{11}-m\times\frac{(1+r)^{11}-1}{r}$，则第12个月还款额 $=L(1+r)$。

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-高斯求和公式

12-19

奥数-计算-等差数列求项数

12-19

奥数-计算-繁分数化简

12-19

奥数-计算-分数整体约分

12-19

奥数-计算-分数裂项进阶

12-19

奥数-计算-分数裂项基础

12-19