

奥数-计算-等差数列求项数

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

💡 阿星精讲：等差数列：求项数 原理

核心概念：嘿！我是阿星！想象一下，你、我、还有好朋友们在排队买最新款的奶茶。队伍是一条“等间距”的直线，你站在第3米的位置，我站在第7米的位置，下一个朋友站在第11米的位置……我们每个人之间的距离（公差）是固定的 4 米。老板突然问：“队伍最后那个在 399 米处的小可爱，是第几个？”难道我们要一个个数过去吗？当然不用！阿星教你一个“数人头”的神奇公式：**(末项 - 首项) ÷ 公差 + 1**。为什么要“+1”？因为从“你”到“我”，距离是 4 米，但已经有 2 个人了呀！计算间隔时，人数总比间隔数多 1，所以千万别忘了给总人数“+1”！

计算秘籍：

识别队伍：找出队伍的起点（首项 a_1 ）、终点（末项 a_n ）和固定间距（公差 d ）。

计算间隔：看看起点到终点，总共有多少个“间距”。算式是： $\frac{\text{终点位置} - \text{起点位置}}{\text{一个间距的大小}}$ ，即 $\frac{a_n - a_1}{d}$ 。

加上自己：间隔数加上第一个人（起点），就是总人数。公式为： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

以“3,7,11...”为例，求第100项：

首项 $a_1 = 3$ ，公差 $d = 4$ ，项数 $n = 100$ 。

代入通项公式： $a_{100} = a_1 + (100 - 1) \times d = 3 + 99 \times 4 = 399$ 。

反过来，已知末项是 399，求项数： $n = \frac{399 - 3}{4} + 1 = \frac{396}{4} + 1 = 99 + 1 = 100$ 。看，完美对应！

阿星口诀：首末相减，除以公差，**最后一定加个1！**

⚠ 易错警示：避坑指南

✗ 错误1：“得意忘形”忘记+1 → 计算完 $\frac{a_n - a_1}{d}$ 后直接当答案。

✓ 正解：时刻牢记公式求的是“项数”，就像数队伍人数。算出来是“间隔数”，必须+1才是总人数。

✗ 错误2：“张冠李戴”用错首末 → 已知第5项是23，第10项是48，误用 $a_1 = 23, a_n = 48$ 去求项数。

✓ 正解：公式中的“首项”“末项”指的是你考察的这段数列的开头和结尾，不一定是整个数列的第一项。此题中这段数列的首项是23，末项是48，公差需先算出： $d = \frac{48 - 23}{10 - 5} = 5$ ，然后项数 $n = \frac{48 - 23}{5} + 1 = 6$ 。

🔥 例题精讲

例题1：阿星的奶茶店排队，第一人站在3米处，最后一人站在203米处，每人间隔4米。请问一共多少人在排队？

❖ 解析：

这明显是一个等差数列问题。首项 $a_1 = 3$ ，末项 $a_n = 203$ ，公差 $d = 4$ 。

代入求项数公式： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

计算： $n = \frac{203 - 3}{4} + 1 = \frac{200}{4} + 1 = 50 + 1 = 51$ 。

✓ 总结：直接应用公式，关键在于识别出题目中的“首项”、“末项”和“公差”。

例题2：一个等差数列的首项是15，公差是6，如果这个数列的最后一项是123，那么这个数列一共有多少项？

❖ 解析：

已知： $a_1 = 15$ ， $d = 6$ ， $a_n = 123$ 。求 n 。

使用公式： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

计算： $n = \frac{123 - 15}{6} + 1 = \frac{108}{6} + 1 = 18 + 1 = 19$ 。

✓ 总结：公式的经典应用。即便项数很多，公式也能瞬间解决。

例题3：楼梯有规律地铺设瓷砖，第一级台阶有 5 块白砖，往后每一级比前一级多铺 2 块。如果最后一级台阶铺了 41 块白砖，这栋楼梯共有多少级？

❖ 解析：

把“每级台阶的砖数”看成数列。首项 $a_1 = 5$ ，公差 $d = 2$ ，末项 $a_n = 41$ 。

题目问“多少级”，就是求项数 n 。

计算： $n = \frac{41-5}{2} + 1 = \frac{36}{2} + 1 = 18 + 1 = 19$ （级）。

总结：将生活问题抽象成等差数列模型，是解题的关键一步。“每级多 2 块”就是公差。

❖ 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

等差数列 5, 8, 11, 14, ..., 59，请问这个数列有多少项？

数列 18, 22, 26, ..., 98 共有多少项？

首项为 10，公差为 3，末项为 106，求项数。

首项为 29，公差为 7，末项为 99，求项数。

一个数列 31, 28, 25, ..., -5，求它的项数。

从 50 开始，每次减 6，直到 2，总共写了多少个数？

已知等差数列第 1 项是 4，第 n 项是 64，公差是 5，求 n 。

电影院座位第一排 20 个，往后每排增加 2 个。最后一排有 50 个座位，一共有几排？

植树问题：在一条路的一端开始种树，每隔 6 米种一棵，共种了若干棵，第一棵到最后一棵距离是 150 米。一共种了多少棵树？（提示：与公式原理完全一样）

阿星存钱，第一周存 10 元，以后每周比前一周多存 5 元。如果最后一周存了 95 元，他存了多久（多少周）？

二、奥数挑战

等差数列 201, 198, 195, ..., 15 的项数是_____。

在 100 到 500 之间，所有能被 11 整除的整数有多少个？（提示：构成等差数列）

一个等差数列的第 4 项是 21，第 10 项是 45，请问这个数列从第 4 项到第 10 项之间共有多少项？（陷阱题！）

已知等差数列 a_n 满足 $a_3 + a_7 = 40$ ，且 $a_1 = 5$ ，若该数列共有 15 项，求它的末项。

数列 1, 5, 9, 13, … 中，数值在 100 到 200 之间的项有多少？

时钟在整点时敲响，1 点钟敲 1 下，2 点钟敲 2 下……从上午 8 点到下午 5 点，时钟一共敲了多少下？（提示：求项数，再求和）

一个等差数列的首项是 7，末项是 91，项数是 15，求它的公差。

三个数成等差数列，它们的和是 27，积是 504，求这三个数。（提示：设中间项为 a ，公差为 d ）

在等差数列中，已知 $a_5 = 20$ ， $a_{15} = 50$ ，求 a_{30} 。

数列： $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 4$ 。请问这个数列有多少项？（注意：公差是分数）

第三关：生活应用（5道）

AI训练：训练一个AI模型，第一天处理 1000 张图片，之后每天处理能力比前一天提升 50 张。如果训练计划最后一天需要处理 2500 张图片，整个训练周期是多少天？

航天发射：火箭逐级分离，每一级发动机的工作时间构成等差数列。若第一级工作 150 秒，最后一级工作 10 秒，且相邻两级工作时间差 20 秒，火箭共有多少级？

投资理财：小红用“等差数列递增法”每月定投基金，第一个月投 1000 元，以后每月比上月多投 100 元。如果她计划最后一个月投 3000 元，她需要连续投资多少个月？

物流分拣：智能仓库的传送带上，包裹等间距排列进行扫描。已知第一个包裹距扫描口 2 米，第 25 个包裹距扫描口 50 米。请问包裹之间的间距（公差）是多少米？

游戏升级：某游戏中，角色从 2 级升级到 3 级需要 200 经验，从 3 级到 4 级需要 250 经验，以此类推，每次升级所需经验构成等差数列。如果角色从 2 级升到 10 级总共需要 3150 经验，请问他从 9 级升到 10 级需要多少经验？（提示：先求公差）

常见疑问 FAQ

💡 专家问答：等差数列：求项数 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点有两个。一是公式的逆向理解：学生熟悉从 a_1, d, n 求 a_n （通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ），但反过来用 $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 时，对“加1”的来源（“植树问题”模型）理解不深，容易遗忘。二是信息的隐蔽性：题目常不直接给出 a_1, a_n, d ，需要从其他条件（如某两项的值）先推导出这三个核心量，步骤增多导致出错。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是序列与函数思想的基石。1. 代数的建模基础：将规律变化的现象抽象为等差数列，是数学建模的第一步。2. 为数列求和奠基：著名的求和公式 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ 必须先知项数 n 。3. 衔接高阶数学：等差数列是线性函数的离散形式 ($a_n = dn + (a_1 - d)$)，理解它有助于未来学习一次函数、线性代数乃至微积分中的差分概念。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！核心套路就是“回归三要素”。无论题目怎么变，最终都要落实到求项数公式 $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。解题时，问自己三个问题：1. 这段数列的首项 a_1 是什么？2. 这段数列的末项 a_n 是什么？3. 它们的公差 d 是什么？把题目条件翻译成这三个量，代入公式，问题迎刃而解。这就是化繁为简的“套路”。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$$n = \frac{59 - 5}{3} + 1 = 19$$

$$n = \frac{98 - 18}{4} + 1 = 21$$

$$n = \frac{106 - 10}{3} + 1 = 33$$

$$n = \frac{99 - 29}{7} + 1 = 11$$

$$\text{公差 } d = -3, \quad n = \frac{-5 - 31}{-3} + 1 = 13$$

$$\text{公差 } d = -6, \quad n = \frac{2 - 50}{-6} + 1 = 9$$

$$n = \frac{64 - 4}{5} + 1 = 13$$

$$n = \frac{50 - 20}{2} + 1 = 16 \text{ (排)}$$

首项 $a_1 = 0$, 末项 $a_n = 150$, 公差 $d = 6$, $n = \frac{150-0}{6} + 1 = 26$ (棵)
 $n = \frac{95-10}{5} + 1 = 18$ (周)

二、奥数挑战

公差 $d = -3$, $n = \frac{15-201}{-3} + 1 = 63$

首项 $a_1 = 110$, 末项 $a_n = 495$, 公差 $d = 11$, $n = \frac{495-110}{11} + 1 = 36$

注意: 问的是“从第4项到第10项之间”, 首项是 21, 末项是 45。先求公差: $d = \frac{45-21}{10-4} = 4$, 再求这段的项数: $n = \frac{45-21}{4} + 1 = 7$ 。或者直接: $10 - 4 + 1 = 7$ 。

由 $a_3 + a_7 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 2a_1 + 8d = 40$, 代入 $a_1 = 5$ 得 $d = \frac{15}{4}$ 。末项 $a_{15} = a_1 + 14d = 5 + 14 \times \frac{15}{4} = 57.5$ 。

大于100的第一项是 101 ($25 \times 4 + 1$), 小于200的最后一项是 197。项数 $n = \frac{197-101}{4} + 1 = 25$ 。

敲响次数数列: 8, 9, 10, ..., 17。项数 $n = 17 - 8 + 1 = 10$, 总和 $S = \frac{10 \times (8+17)}{2} = 125$ 。

由 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 得 $91 = 7 + (15 - 1)d$, 解得 $d = 6$ 。

设三数为 $a - d, a, a + d$ 。和: $3a = 27 \Rightarrow a = 9$ 。积: $(9 - d) \times 9 \times (9 + d) = 504 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5$ 。三数为 4, 9, 14 或 14, 9, 4。

公差 $d = \frac{a_{15}-a_5}{15-5} = \frac{50-20}{10} = 3$ 。 $a_{30} = a_{15} + (30 - 15)d = 50 + 15 \times 3 = 95$ 。

公差 $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。末项 $4 = \frac{1}{3} + (n - 1) \times \frac{1}{6}$, 解得 $n = 23$ 。

第三关: 生活应用

$n = \frac{2500-1000}{50} + 1 = 31$ (天)

公差 $d = -20$ 。由 $n = \frac{10-150}{-20} + 1 = 8$, 火箭有 8 级。

$n = \frac{3000-1000}{100} + 1 = 21$ (个月)

把“距离”看成数列, 首项 $a_1 = 2$, 第 25 项 $a_{25} = 50$ 。由 $a_{25} = a_1 + (25 - 1)d$ 得 $50 = 2 + 24d$, 解得 $d = 2$ (米)。

设从 2 级升 3 级需 $a_1 = 200$, 公差为 d 。从 2 级到 10 级是升了 8 次, 对应数列的前 8 项和 $S_8 = 3150$ 。由 $S_8 = \frac{8 \times [2 \times 200 + (8-1)d]}{2} = 3150$ 解得 $d = 50$ 。则 9 级升 10 级为第 8 项: $a_8 = a_1 + 7d = 200 + 7 \times 50 = 550$ (经验)。

更多精彩内容请访问 星火网 www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-繁分数化简

12-19

奥数-计算-分数整体约分

12-19

奥数-计算-分数裂项进阶

12-19

奥数-计算-分数裂项基础

12-19

奥数-几何-巧求周长平移

12-19

奥数-计算-基准数法

12-19

