

# 奥数-计算-等差数列求项数

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

## 阿星精讲：等差数列：求项数 原理

**核心概念：**嘿！我是阿星！想象一下，你、我、还有好朋友们在排队买最新款的奶茶。队伍是一条“等间距”的直线，你站在第3米的位置，我站在第7米的位置，下一个朋友站在第11米的位置……我们每个人之间的距离（公差）是固定的4米。老板突然问：“队伍最后那个在399米处的小可爱，是第几个？”难道我们要一个个数过去吗？当然不用！阿星教你一个“数人头”的神奇公式：**（末项 - 首项）÷ 公差 + 1**。为什么要“+1”？因为从“你”到“我”，距离是4米，但已经有2个人了呀！计算间隔时，人数总比间隔数多1，所以千万别忘了给总人数“+1”！

**计算秘籍：**

**识别队伍：**找出队伍的起点（首项  $a_1$ ）、终点（末项  $a_n$ ）和固定间距（公差  $d$ ）。

**计算间隔：**看看起点到终点，总共有多少个“间距”。算式是： $\frac{\text{终点位置} - \text{起点位置}}{\text{一个间隔的大小}}$ ，即  $\frac{a_n - a_1}{d}$ 。

**加上自己：**间隔数加上第一个人（起点），就是总人数。公式为： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

以“3,7,11...”为例，求第100项：

首项  $a_1 = 3$ ，公差  $d = 4$ ，项数  $n = 100$ 。

代入通项公式： $a_{100} = a_1 + (100 - 1) \times d = 3 + 99 \times 4 = 399$ 。

反过来，已知末项是399，求项数： $n = \frac{399 - 3}{4} + 1 = \frac{396}{4} + 1 = 99 + 1 = 100$ 。看，完美对应！

**阿星口诀：**首末相减，除以公差，最后一定加个1！

⚠ 易错警示：避坑指南

✗ 错误1：“得意忘形”忘记+1 → 计算完  $\frac{a_n - a_1}{d}$  后直接当答案。

✓ 正解：时刻牢记公式求的是“项数”，就像数队伍人数。算出来是“间隔数”，必须+1才是总人数。

✗ 错误2：“张冠李戴”用错首末 → 已知第5项是23，第10项是48，误用  $a_1 = 23, a_n = 48$  去求项数。

✓ 正解：公式中的“首项”“末项”指的是你考察的这段数列的**开头和结尾**，不一定是整个数列的第一项。此题中这段数列的首项是23，末项是48，公差需先算出： $d = \frac{48-23}{10-5} = 5$ ，然后项数  $n = \frac{48-23}{5} + 1 = 6$ 。

## 🔥 例题精讲

**例题1：**阿星的奶茶店排队，第一人站在 3 米处，最后一人站在 203 米处，每人间隔 4 米。请问一共多少人在排队？

🔗 解析：

这明显是一个等差数列问题。首项  $a_1 = 3$ ，末项  $a_n = 203$ ，公差  $d = 4$ 。

代入求项数公式： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

计算： $n = \frac{203-3}{4} + 1 = \frac{200}{4} + 1 = 50 + 1 = 51$ 。

✓ **总结：**直接应用公式，关键在于识别出题目中的“首项”、“末项”和“公差”。

**例题2：**一个等差数列的首项是 15，公差是 6，如果这个数列的最后一项是 123，那么这个数列一共有多少项？

🔗 解析：

已知： $a_1 = 15$ ， $d = 6$ ， $a_n = 123$ 。求  $n$ 。

使用公式： $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。

计算： $n = \frac{123-15}{6} + 1 = \frac{108}{6} + 1 = 18 + 1 = 19$ 。

✓ **总结：**公式的经典应用。即便项数很多，公式也能瞬间解决。

**例题3：**楼梯有规律地铺设瓷砖，第一级台阶有 5 块白砖，往后每一级比前一级多铺 2 块。如果最后一级台阶铺了 41 块白砖，这栋楼梯共有多少级？

 **解析：**

把“每级台阶的砖数”看成数列。首项  $a_1 = 5$ ，公差  $d = 2$ ，末项  $a_n = 41$ 。

题目问“多少级”，就是求项数  $n$ 。

计算： $n = \frac{41-5}{2} + 1 = \frac{36}{2} + 1 = 18 + 1 = 19$ （级）。

**✓ 总结：**将生活问题抽象成等差数列模型，是解题的关键一步。“每级多 2 块”就是公差。

## 阶梯训练

### 第一关：基础热身（10道）

等差数列 5, 8, 11, 14, ..., 59，请问这个数列有多少项？

数列 18, 22, 26, ..., 98 共有多少项？

首项为 10，公差为 3，末项为 106，求项数。

首项为 29，公差为 7，末项为 99，求项数。

一个数列 31, 28, 25, ..., -5，求它的项数。

从 50 开始，每次减 6，直到 2，总共写了多少个数？

已知等差数列第 1 项是 4，第  $n$  项是 64，公差是 5，求  $n$ 。

电影院座位第一排 20 个，往后每排增加 2 个。最后一排有 50 个座位，一共有几排？

植树问题：在一条路的一端开始种树，每隔 6 米种一棵，共种了若干棵，第一棵到最后一棵距离是 150 米。一共种了多少棵树？（提示：与公式原理完全一样）

阿星存钱，第一周存 10 元，以后每周比前一周多存 5 元。如果最后一周存了 95 元，他存了多久（多少周）？

## 二、奥数挑战

等差数列 201, 198, 195, ..., 15 的项数是\_\_\_\_\_。

在 100 到 500 之间，所有能被 11 整除的整数有多少个？（提示：构成等差数列）

一个等差数列的第 4 项是 21，第 10 项是 45，请问这个数列从第 4 项到第 10 项之间共有多少项？（陷阱题！）

已知等差数列  $a_n$  满足  $a_3 + a_7 = 40$ ，且  $a_1 = 5$ ，若该数列共有 15 项，求它的末项。

数列 1, 5, 9, 13, ... 中，数值在 100 到 200 之间的项有多少？

时钟在整点时敲响，1 点钟敲 1 下，2 点钟敲 2 下……从上午 8 点到下午 5 点，时钟一共敲了多少下？（提示：求项数，再求和）

一个等差数列的首项是 7，末项是 91，项数是 15，求它的公差。

三个数成等差数列，它们的和是 27，积是 504，求这三个数。（提示：设中间项为  $a$ ，公差为  $d$ ）

在等差数列中，已知  $a_5 = 20$ ， $a_{15} = 50$ ，求  $a_{30}$ 。

数列： $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 4$ 。请问这个数列有多少项？（注意：公差是分数）

### 第三关：生活应用（5道）

**AI训练：**训练一个AI模型，第一天处理 1000 张图片，之后每天处理能力比前一天提升 50 张。如果训练计划最后一天需要处理 2500 张图片，整个训练周期是多少天？

**航天发射：**火箭逐级分离，每一级发动机的工作时间构成等差数列。若第一级工作 150 秒，最后一级工作 10 秒，且相邻两级工作时间差 20 秒，火箭共有多少级？

**投资理财：**小红用“等差数列递增法”每月定投基金，第一个月投 1000 元，以后每月比上月多投 100 元。如果她计划最后一个月投 3000 元，她需要连续投资多少个月？

**物流分拣：**智能仓库的传送带上，包裹等间距排列进行扫描。已知第一个包裹距扫描口 2 米，第 25 个包裹距扫描口 50 米。请问包裹之间的间距（公差）是多少米？

**游戏升级：**某游戏中，角色从 2 级升级到 3 级需要 200 经验，从 3 级到 4 级需要 250 经验，以此类推，每次升级所需经验构成等差数列。如果角色从 2 级升到 10 级总共需要 3150 经验，请问他从 9 级升到 10 级需要多少经验？（提示：先求公差）

### 常见疑问 FAQ

## 💡 专家问答：等差数列：求项数 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点有两个。一是**公式的逆向理解**：学生熟悉从  $a_1, d, n$  求  $a_n$ （通项公式  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ），但反过来用  $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$  时，对“加1”的来源（“植树问题”模型）理解不深，容易遗忘。二是**信息的隐蔽性**：题目常不直接给出  $a_1, a_n, d$ ，需要从其他条件（如某两项的值）先推导出这三个核心量，步骤增多导致出错。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是**序列与函数思想**的基石。1. **代数的建模基础**：将规律变化的现象抽象为等差数列，是数学建模的第一步。2. **为数列求和奠基**：著名的求和公式  $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  必须先知项数  $n$ 。3. **衔接高阶数学**：等差数列是线性函数的离散形式（ $a_n = dn + (a_1 - d)$ ），理解它有助于未来学习一次函数、线性代数乃至微积分中的差分概念。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！核心套路就是“**回归三要素**”。无论题目怎么变，最终都要落实到求项数公式  $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ 。解题时，问自己三个问题：1. 这段数列的**首项**  $a_1$  是什么？2. 这段数列的**末项**  $a_n$  是什么？3. 它们的**公差**  $d$  是什么？把题目条件翻译成这三个量，代入公式，问题迎刃而解。这就是化繁为简的“套路”。

### 参考答案与解析

#### 第一关：基础热身

$$n = \frac{59-5}{3} + 1 = 19$$

$$n = \frac{98-18}{4} + 1 = 21$$

$$n = \frac{106-10}{3} + 1 = 33$$

$$n = \frac{99-29}{7} + 1 = 11$$

$$\text{公差 } d = -3, \quad n = \frac{-5-31}{-3} + 1 = 13$$

$$\text{公差 } d = -6, \quad n = \frac{2-50}{-6} + 1 = 9$$

$$n = \frac{64-4}{5} + 1 = 13$$

$$n = \frac{50-20}{2} + 1 = 16 \text{ (排)}$$

首项  $a_1 = 0$ , 末项  $a_n = 150$ , 公差  $d = 6$ ,  $n = \frac{150-0}{6} + 1 = 26$  (棵)

$n = \frac{95-10}{5} + 1 = 18$  (周)

## 二、奥数挑战

公差  $d = -3$ ,  $n = \frac{15-201}{-3} + 1 = 63$

首项  $a_1 = 110$ , 末项  $a_n = 495$ , 公差  $d = 11$ ,  $n = \frac{495-110}{11} + 1 = 36$

注意: 问的是“从第4项到第10项之间”, 首项是 21, 末项是 45。先求公差:  $d = \frac{45-21}{10-4} = 4$ , 再求这段的项数:  $n = \frac{45-21}{4} + 1 = 7$ 。或者直接:  $10 - 4 + 1 = 7$ 。

由  $a_3 + a_7 = (a_1 + 2d) + (a_1 + 6d) = 2a_1 + 8d = 40$ , 代入  $a_1 = 5$  得  $d = \frac{15}{4}$ 。末项  $a_{15} = a_1 + 14d = 5 + 14 \times \frac{15}{4} = 57.5$ 。

大于100的第一项是 101 ( $25 \times 4 + 1$ ), 小于200的最后一项是 197。项数  $n = \frac{197-101}{4} + 1 = 25$ 。

敲响次数数列: 8, 9, 10, ..., 17。项数  $n = 17 - 8 + 1 = 10$ , 总和  $S = \frac{10 \times (8+17)}{2} = 125$ 。

由  $a_n = a_1 + (n-1)d$  得  $91 = 7 + (15-1)d$ , 解得  $d = 6$ 。

设三数为  $a-d, a, a+d$ 。和:  $3a = 27 \Rightarrow a = 9$ 。积:  $(9-d) \times 9 \times (9+d) = 504 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5$ 。三数为 4, 9, 14 或 14, 9, 4。

公差  $d = \frac{a_{15}-a_5}{15-5} = \frac{50-20}{10} = 3$ 。  $a_{30} = a_{15} + (30-15)d = 50 + 15 \times 3 = 95$ 。

公差  $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ 。末项  $4 = \frac{1}{3} + (n-1) \times \frac{1}{6}$ , 解得  $n = 23$ 。

### 第三关: 生活应用

$n = \frac{2500-1000}{50} + 1 = 31$  (天)

公差  $d = -20$ 。由  $n = \frac{10-150}{-20} + 1 = 8$ , 火箭有 8 级。

$n = \frac{3000-1000}{100} + 1 = 21$  (个月)

把“距离”看成数列, 首项  $a_1 = 2$ , 第 25 项  $a_{25} = 50$ 。由  $a_{25} = a_1 + (25-1)d$  得  $50 = 2 + 24d$ , 解得  $d = 2$  (米)。

设从 2 级升 3 级需  $a_1 = 200$ , 公差为  $d$ 。从 2 级到 10 级是升了 8 次, 对应数列的前 8 项和  $S_8 = 3150$ 。由  $S_8 = \frac{8 \times [2 \times 200 + (8-1)d]}{2} = 3150$  解得  $d = 50$ 。则 9 级升 10 级为第 8 项:  $a_8 = a_1 + 7d = 200 + 7 \times 50 = 550$  (经验)。

更多精彩内容请访问 星火网 [www.xinghuo.tv](http://www.xinghuo.tv)

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

## 更多练习题

奥数-计算-繁分数化简

12-19

奥数-计算-分数整体约分

12-19

奥数-计算-分数裂项进阶

12-19

奥数-计算-分数裂项基础

12-19

奥数-几何-巧求周长平移

12-19

奥数-计算-基准数法

12-19

