

# 奥数-计算-循环小数化分数

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

## 在线阅读

### 💡 阿星精讲：循环小数：纯循环转化 原理

**核心概念：**想象一个小数点后的数字尾巴在跑步，比如  $0.333\dots$ ，这个“3”就是一个永动机运动员，在一段无限长的环形跑道上一直跑。我们的任务就是为这个永远跑不完步的“运动员”找到一个安稳的“家”——一个分数。阿星的魔法口诀是：“**几个循环节就写几个9做分母。**”就像为这个环形跑道铺上“9”这种特殊的橡胶颗粒，有几个运动员（循环节有几位），就铺几个“9”。分子呢？就是运动员最开始的样子（完整的循环节）。

#### 计算秘籍：

设未知数：令  $x = 0.\dot{3}$ （表示纯循环小数  $0.333\dots$ ）。

制造“对齐”：因为循环节是1位，所以将等式两边乘以  $10^1 = 10$ ：  $10x = 3.\dot{3}$ 。

魔法消元（下式减上式）：  $10x - x = 3.\dot{3} - 0.\dot{3}$

得到：  $9x = 3$

求出  $x$ ：  $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

看！最后的分母正是由1个“9”构成的。这就是口诀的来源。

**阿星口诀：**“尾巴无限绕圈跑，几个数字几个9，头上数字原样抄。”（“尾巴”指循环节，“头上数字”指循环节本身构成的整数）。

### ⚠ 易错警示：避坑指南

✗ 错误1：将  $0.\dot{9}$  直接写成  $\frac{9}{10}$ 。 → ✓ 正解：循环节“9”是一位，所以分母是一个9，即  $0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1$ 。这是一个非常重要的结论，说明 1 和  $0.999\dots$  是同一个数的两种写法。

✗ 错误2：处理像  $0.1\dot{2}$  这样的混循环小数时，也直接用几个9做分母。→ ✓ 正解：口诀只适用于纯循环小数（即从小数点后第一位就开始循环）。 $0.1\dot{2}$  小数点后的“1”不循环，是混循环小数，方法更复杂（需要用到几个9后面跟几个0做分母）。

## 🔥 例题精讲

**例题1：**将纯循环小数  $0.\dot{7}$  化为分数。

🔑 解析：

设  $x = 0.\dot{7}$ 。

循环节长度是1，两边乘以 10：  $10x = 7.\dot{7}$ 。

下减上：  $10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$ ，得  $9x = 7$ 。

所以  $x = \frac{7}{9}$ 。

✓ 总结：一位循环节“7”，直接写分母一个9，分子为7。

**例题2：**将纯循环小数  $0.\dot{9}$  化为分数。

🔑 解析：

设  $x = 0.\dot{9}$ 。

两边乘以 10：  $10x = 9.\dot{9}$ 。

下减上：  $10x - x = 9.\dot{9} - 0.\dot{9}$ ，得  $9x = 9$ 。

所以  $x = \frac{9}{9} = 1$ 。这是一个关键结论！

✓ 总结：按口诀操作，得到  $\frac{9}{9}$ ，必须化简为 1。这证明了  $0.999... = 1$ 。

**例题3：**将纯循环小数  $0.\dot{1}4285\dot{7}$  化为分数。

🔑 解析：

设  $x = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ （循环节是142857）。

循环节长度是6，两边乘以  $10^6 = 1000000$ ：  $1000000x = 142857.\dot{1}4285\dot{7}$ 。

下减上：  $1000000x - x = 142857$ ，得  $999999x = 142857$ 。

所以  $x = \frac{142857}{999999}$ 。化简（分子分母同除以142857）：  $x = \frac{1}{7}$ 。

☑ **总结：**六位循环节“142857”，分母就是六个9（999999），分子是循环节 142857。神奇的是，它等于  $\frac{1}{7}$ 。

## 阶梯训练

### 第一关：基础热身（10道）

将  $0.\dot{5}$  化为分数。

将  $0.2\dot{7}$ （循环节27）化为分数。

将  $0.\dot{1}8$  化为分数。

将  $0.\dot{3}6\dot{9}$ （循环节369）化为分数并化简。

将  $0.7\dot{4}$  化为分数。

将  $0.\dot{0}3$ （循环节03）化为分数。

将  $0.\dot{6}$  化为分数。

将  $0.1\dot{2}\dot{3}$  化为分数。

将  $0.5\dot{8}\dot{3}$  化为分数。

将  $0.\dot{0}9$ （循环节09）化为分数并化简。

## 二、奥数挑战

计算： $0.\dot{1} + 0.\dot{2}$ ，结果用分数表示。

计算： $0.\dot{3} \times 0.\dot{6}$ ，结果用分数表示。

已知  $0.\dot{a}\dot{b} = \frac{ab}{99}$ （ $ab$  表示两位数），若这个分数可化简为  $\frac{3}{11}$ ，求这个两位数。

纯循环小数  $0.\dot{A}\dot{B}\dot{C}$  化为分数后是  $\frac{ABC}{999}$ ，且该分数等于  $\frac{1}{N}$ （ $N$  为整数），求  $N$  可能的值。

比较大小： $0.\dot{9}$  和 1。

将  $0.\dot{9}9\dot{9}$ （循环节999）化为分数。

若  $0.\dot{m} = \frac{5}{9}$ ，求  $m$ 。

若  $0.\dot{x}y = \frac{1}{5}$ ，求两位数  $xy$ 。

计算：  $0.\dot{1} + 0.\dot{0}1$ （第二个数是  $0.010101\dots$ ）。

证明：  $0.\dot{1}4\dot{2}8\dot{5}\dot{7} + 0.\dot{8}5\dot{7}1\dot{4}\dot{2} = 1$ 。

### 第三关：生活应用（5道）

【AI训练】AI模型在评估时，准确率有时会显示为循环小数，例如一个模型在测试集上的准确率为  $0.8\dot{3}$ 。请将此准确率化为最简分数，以便与其它以分数报告结果的模型进行精确比较。

【航天轨道】假设一个近地卫星的运行周期（绕地球一圈的时间）与地球自转周期存在一个简单的数学关系，其比值是一个纯循环小数  $0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$ 。请问卫星周期是地球自转周期的几分之几？

【密码学】在一个简单的加密游戏中，密钥生成规则是将一个分数化为小数。你得到的密文提示是“ $0.090909\dots$ ”。请将这个循环小数化为分数，这个分数可能就是解密的关键。

【网购折扣】一件商品参加“循环折扣”活动，其折扣率被标示为纯循环小数  $0.\dot{9}$ 。请问这件商品是打几折？实际支付额是原价的多少？

【音乐节拍】一段电子乐的鼓点循环周期，与整首歌曲的基准节拍周期之比是  $0.\dot{6}$ 。为了编程实现这个鼓点，需要将其表示为最简分数。请问这个比值是多少？

## 🧠 常见疑问 FAQ

### 💡 专家问答：循环小数：纯循环转化 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难点主要在于“无限”与“有限”的思维转换。学生第一次系统地将一个“永远写不完”的小数，用一个简洁的分数“锁”住。这挑战了他们对数字的直观感受。阿星的“几个循环节几个9”口诀，本质上是将无限循环的过程，通过  $10^n x - x$  的代数技巧，巧妙地消除了“无限”部分，只剩下一个有限的等式。理解这个构造过程是关键。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是连接“算术”与“代数”的经典桥梁。

**代数思维：**“设  $x$ ”然后构造方程求解，是解决众多数学问题的通用模型。

**数列与极限（高中/大学）：**循环小数  $0.\dot{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$  本身就是一个无穷等比数列  $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \times (\frac{1}{10})^n$  的和。转化过程隐含了求无穷递缩等比数列和的极限思想。

**数论：**为什么分母是9、99、999？这与  $10^n - 1$  有关，引出了模运算和整除性的概念。例如， $\frac{1}{7}$  产生6位循环节，因为  $10^6 - 1 = 999999$  能被7整除。

**问：**有什么一招必胜的解题“套路”吗？

**答：**对于**纯循环小数**，确实有！直接应用**阿星核心公式**：

$$0.\dot{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{\underset{n\uparrow}{99\dots 9}}$$

其中  $a_1 a_2 \dots a_n$  表示由循环节数字组成的  $n$  位整数。

例如： $0.1\dot{2}3 = \frac{123}{999}$ ， $0.0\dot{5} = \frac{05}{99} = \frac{5}{99}$ 。

记住：“**几位循环节，分母就是几个9，分子就是循环节。**”然后别忘了化简分数！

## 参考答案与解析

### 第一关：基础热身

$$\frac{5}{9}$$

$$\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

$$\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

$$\frac{369}{999} = \frac{41}{111} \quad (\text{同除以9})$$

$$\frac{74}{99}$$

$$\frac{03}{99} = \frac{1}{33}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{123}{999} = \frac{41}{333} \quad (\text{同除以3})$$

$\frac{583}{999}$  (检查  $583 = 11 \times 53$ ,  $999 = 27 \times 37$ , 已最简)

$$\frac{09}{99} = \frac{1}{11}$$

## 二、奥数挑战

$$0.\dot{1} + 0.\dot{2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.\dot{3} \times 0.\dot{6} = \frac{3}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9} \text{ 或直接 } 0.\dot{2}$$

$$\frac{ab}{99} = \frac{3}{11} \Rightarrow ab = \frac{3 \times 99}{11} = 27$$

$\frac{ABC}{999} = \frac{1}{N} \Rightarrow ABC \times N = 999 = 27 \times 37$ 。N 可能是 999 的大于 1 的因数，且 ABC 为三位数。例如  $N = 3, ABC = 333$ ;  $N = 27, ABC = 37$  (不是三位数舍去);  $N = 37, ABC = 27$  (舍去);  $N = 111, ABC = 9$  (舍去);  $N = 333, ABC = 3$  (舍去)。所以  $N = 3$ , 对应  $0.\dot{3}$ 。更著名的解是  $N = 7$ , 此时  $ABC = 142857$  正好是  $999999/7$  的循环节。

$0.\dot{9} = 1$ , 两者相等。

$$0.\dot{999} = \frac{999}{999} = 1$$

$$\frac{m}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow m = 5$$

$\frac{xy}{99} = \frac{1}{5} \Rightarrow xy = \frac{99}{5} = 19.8$  不是整数，无解。说明  $\frac{1}{5}$  不是纯循环小数 (它是有限小数 0.2)。

$$0.\dot{1} = \frac{1}{9}, 0.\dot{01} = \frac{01}{99} = \frac{1}{99}。和为 \frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{11}{99} + \frac{1}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}。$$

证明:  $0.\dot{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ ,  $0.\dot{857142} = \frac{857142}{999999} = \frac{6}{7}$  (因为  $857142 = 6 \times 142857$ )。故和为  $\frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$ 。

### 第三关：生活应用

$$0.\dot{83} = \frac{83}{99}$$

$0.\dot{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ 。卫星周期是地球自转周期的  $\frac{1}{7}$ 。

$0.\dot{09} = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ 。解密分数可能是  $\frac{1}{11}$ 。

$0.\dot{9} = 1$ 。折扣率是 10 折 (即原价)，实际支付额是原价的 100%。

$0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 。鼓点周期与基准节拍周期之比是  $\frac{2}{3}$ 。

更多精彩内容请访问 星火网 [www.xinghuo.tv](http://www.xinghuo.tv)

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

## 更多练习题

奥数-计算-完全平方数特征

12-19

奥数-计算-平方差公式

12-19

奥数-计算-定义新运算逆推

12-19

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19

奥数-计算-高斯求和公式

12-19

