

奥数-计算-循环小数化分数

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

💡 阿星精讲：循环小数：纯循环转化 原理

核心概念：想象一个小数点后的数字尾巴在跑步，比如 $0.\dot{3}$ ，这个“3”就是一个永动机运动员，在一段无限长的环形跑道上一直跑。我们的任务就是为这个永远跑不完步的“运动员”找到一个安稳的“家”——一个分数。阿星的魔法口诀是：“**几个循环节就写几个9做分母。**”就像为这个环形跑道铺上“9”这种特殊的橡胶颗粒，有几个运动员（循环节有几位），就铺几个“9”。分子呢？就是运动员最开始的样子（完整的循环节）。

计算秘籍：

设未知数：令 $x = 0.\dot{3}$ （表示纯循环小数 $0.333\dots$ ）。

制造“对齐”：因为循环节是1位，所以将等式两边乘以 $10^1 = 10$ ： $10x = 3.\dot{3}$ 。

魔法消元（下式减上式）： $10x - x = 3.\dot{3} - 0.\dot{3}$

得到： $9x = 3$

求出 x ： $x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

看！最后的分母正是由1个“9”构成的。这就是口诀的来源。

阿星口诀：“尾巴无限绕圈跑，几个数字几个9，头上数字原样抄。”（“尾巴”指循环节，“头上数字”指循环节本身构成的整数）。

⚠ 易错警示：避坑指南

✗ 错误1：将 $0.\dot{9}$ 直接写成 $\frac{9}{10}$ 。 → 正解：循环节“9”是一位，所以分母是一个9，即 $0.\dot{9} = \frac{9}{9} = 1$ 。这是一个非常重要的结论，说明 1 和 $0.999\dots$ 是同一个数的两种写法。

✗ 错误2：处理像 $0.1\dot{2}$ 这样的混循环小数时，也直接用几个9做分母。→ ✓ 正解：口诀只适用于纯循环小数（即从小数点后第一位就开始循环）。 $0.1\dot{2}$ 小数点后的“1”不循环，是混循环小数，方法更复杂（需要用到几个9后面跟几个0做分母）。

🔥 例题精讲

例题1：将纯循环小数 $0.\dot{7}$ 化为分数。

❖ 解析：

设 $x = 0.\dot{7}$ 。

循环节长度是1，两边乘以 10： $10x = 7.\dot{7}$ 。

下减上： $10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$ ，得 $9x = 7$ 。

所以 $x = \frac{7}{9}$ 。

✓ 总结：一位循环节“7”，直接写分母一个9，分子为7。

例题2：将纯循环小数 $0.\dot{9}$ 化为分数。

❖ 解析：

设 $x = 0.\dot{9}$ 。

两边乘以 10： $10x = 9.\dot{9}$ 。

下减上： $10x - x = 9.\dot{9} - 0.\dot{9}$ ，得 $9x = 9$ 。

所以 $x = \frac{9}{9} = 1$ 。这是一个关键结论！

✓ 总结：按口诀操作，得到 $\frac{9}{9}$ ，必须化简为 1。这证明了 $0.999\dots = 1$ 。

例题3：将纯循环小数 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ 化为分数。

❖ 解析：

设 $x = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ （循环节是142857）。

循环节长度是6，两边乘以 $10^6 = 1000000$ ： $1000000x = 142857.\dot{1}4285\dot{7}$ 。

下减上： $1000000x - x = 142857$ ，得 $999999x = 142857$ 。

所以 $x = \frac{142857}{999999}$ 。化简（分子分母同除以142857）： $x = \frac{1}{7}$ 。

✓ **总结：**六位循环节“142857”，分母就是六个9（999999），分子是循环节142857。神奇的是，它等于 $\frac{1}{7}$ 。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

将 $0.\dot{5}$ 化为分数。

将 $0.\dot{2}\dot{7}$ （循环节27）化为分数。

将 $0.1\dot{8}$ 化为分数。

将 $0.\dot{3}6\dot{9}$ （循环节369）化为分数并化简。

将 $0.\dot{7}\dot{4}$ 化为分数。

将 $0.0\dot{3}$ （循环节03）化为分数。

将 $0.\dot{6}$ 化为分数。

将 $0.1\dot{2}\dot{3}$ 化为分数。

将 $0.5\dot{8}\dot{3}$ 化为分数。

将 $0.0\dot{9}$ （循环节09）化为分数并化简。

二、奥数挑战

计算： $0.\dot{1} + 0.\dot{2}$ ，结果用分数表示。

计算： $0.\dot{3} \times 0.\dot{6}$ ，结果用分数表示。

已知 $0.\dot{a}\dot{b} = \frac{ab}{99}$ （ab表示两位数），若这个分数可化简为 $\frac{3}{11}$ ，求这个两位数。

纯循环小数 $0.\dot{A}\dot{B}\dot{C}$ 化为分数后是 $\frac{ABC}{999}$ ，且该分数等于 $\frac{1}{N}$ （N为整数），求N可能的值。

比较大小： $0.\dot{9}$ 和1。

将 $0.9\dot{9}\dot{9}$ （循环节999）化为分数。

若 $0.\dot{m} = \frac{5}{9}$ ，求m。

若 $0.\dot{x}\dot{y} = \frac{1}{5}$, 求两位数 xy 。

计算: $0.\dot{1} + 0.\dot{0}1$ (第二个数是 $0.010101\dots$)。

证明: $0.1\dot{4}285\dot{7} + 0.\dot{8}571\dot{4}\dot{2} = 1$ 。

第三关: 生活应用 (5道)

【AI训练】 AI模型在评估时, 准确率有时会显示为循环小数, 例如一个模型在测试集上的准确率为 $0.\dot{8}\dot{3}$ 。请将此准确率化为最简分数, 以便与其它以分数报告结果的模型进行精确比较。

【航天轨道】 假设一个近地卫星的运行周期 (绕地球一圈的时间) 与地球自转周期存在一个简单的数学关系, 其比值是一个纯循环小数 $(0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7})$ 。请问卫星周期是地球自转周期的几分之几?

【密码学】 在一个简单的加密游戏中, 密钥生成规则是将一个分数化为小数。你得到的密文提示是“ $0.090909\dots$ ”。请将这个循环小数化为分数, 这个分数可能就是解密的关键。

【网购折扣】 一件商品参加“循环折扣”活动, 其折扣率被标示为纯循环小数 $0.\dot{9}$ 。请问这件商品是打几折? 实际支付额是原价的多少?

【音乐节拍】 一段电子乐的鼓点循环周期, 与整首歌曲的基准节拍周期之比是 $(0.\dot{6})$ 。为了编程实现这个鼓点, 需要将其表示为最简分数。请问这个比值是多少?

常见疑问 FAQ

专家问答: 循环小数: 纯循环转化 的深度思考

问: 为什么很多学生觉得这一块很难?

答: 难点主要在于“无限”与“有限”的思维转换。学生第一次系统地将一个“永远写不完”的小数, 用一个简洁的分数“锁”住。这挑战了他们对数字的直观感受。阿星的“几个循环节几个9”口诀, 本质上是将无限循环的过程, 通过 $10^n x - x$ 的代数技巧, 巧妙地消除了“无限”部分, 只剩下一个有限的等式。理解这个构造过程是关键。

问: 学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助?

答: 这是连接“算术”与“代数”的经典桥梁。

代数思维：“设 x ”然后构造方程求解，是解决众多数学问题的通用模型。

数列与极限（高中/大学）：循环小数 $0.\dot{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + \dots$ 本身就是一个无穷等比数列 $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \times (\frac{1}{10})^n$ 的和。转化过程隐含了求无穷递缩等比数列和的极限思想。

数论：为什么分母是9、99、999？这与 $10^n - 1$ 有关，引出了模运算和整除性的概念。例如， $\frac{1}{7}$ 产生6位循环节，因为 $10^6 - 1 = 999999$ 能被7整除。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：对于纯循环小数，确实有！直接应用阿星核心公式：

$$0.\dot{a}_1a_2\dots a_n = \frac{a_1a_2\dots a_n}{99\dots 9}$$

n 个

其中 $a_1a_2\dots a_n$ 表示由循环节数字组成的 n 位整数。

例如： $0.1\dot{2}3 = \frac{123}{999}$, $0.0\dot{5} = \frac{05}{99} = \frac{5}{99}$ 。

记住：“几位循环节，分母就是几个9，分子就是循环节。”然后别忘了化简分数！

参考答案与解析

第一关：基础热身

$$\frac{5}{9}$$
$$\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$
$$\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$
$$\frac{369}{999} = \frac{41}{111} \quad (\text{同除以9})$$

$$\frac{74}{99}$$
$$\frac{03}{99} = \frac{1}{33}$$
$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{123}{999} = \frac{41}{333} \quad (\text{同除以3})$$

$\frac{583}{999}$ (检查 $583 = 11 \times 53$, $999 = 27 \times 37$, 已最简)

$$\frac{09}{99} = \frac{1}{11}$$

二、奥数挑战

$$0.\dot{1} + 0.\dot{2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0.\dot{3} \times 0.\dot{6} = \frac{3}{9} \times \frac{6}{9} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9} \text{ 或直接 } 0.\dot{2}$$

$$\frac{ab}{99} = \frac{3}{11} \Rightarrow ab = \frac{3 \times 99}{11} = 27$$

$\frac{ABC}{999} = \frac{1}{N} \Rightarrow ABC \times N = 999 = 27 \times 37$ 。 N 可能是 999 的大于1的因数, 且 ABC 为三位数。例如 $N = 3, ABC = 333$; $N = 27, ABC = 37$ (不是三位数舍去); $N = 37, ABC = 27$ (舍去); $N = 111, ABC = 9$ (舍去); $N = 333, ABC = 3$ (舍去)。所以 $N = 3$, 对应 $0.\dot{3}$ 。更著名的解是 $N = 7$, 此时 $ABC = 142857$ 正好是 $999999/7$ 的循环节。

$0.\dot{9} = 1$, 两者相等。

$$0.\dot{9}9\dot{9} = \frac{999}{999} = 1$$

$$\frac{m}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow m = 5$$

$\frac{xy}{99} = \frac{1}{5} \Rightarrow xy = \frac{99}{5} = 19.8$ 不是整数, 无解。说明 $\frac{1}{5}$ 不是纯循环小数 (它是有限小数 0.2)。

$0.\dot{1} = \frac{1}{9}$, $0.\dot{0}1 = \frac{01}{99} = \frac{1}{99}$ 。和为 $\frac{1}{9} + \frac{1}{99} = \frac{11}{99} + \frac{1}{99} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ 。

证明: $0.\dot{1}428\dot{5}\dot{7} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$, $0.8\dot{5}714\dot{2} = \frac{857142}{999999} = \frac{6}{7}$ (因为 $857142 = 6 \times 142857$)。故和为 $\frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1$ 。

第三关: 生活应用

$$0.\dot{8}\dot{3} = \frac{83}{99}$$

$0.\dot{1}428\dot{5}\dot{7} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ 。卫星周期是地球自转周期的 $\frac{1}{7}$ 。

$$0.\dot{0}9 = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$
。解密分数可能是 $\frac{1}{11}$ 。

$0.\dot{9} = 1$ 。折扣率是 10 折 (即原价), 实际支付额是原价的 100%。

$$0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
。鼓点周期与基准节拍周期之比是 $\frac{2}{3}$ 。

更多精彩内容请访问 **星火网** www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-完全平方数特征

12-19

奥数-计算-平方差公式

12-19

奥数-计算-定义新运算逆推

12-19

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19

奥数-计算-高斯求和公式

12-19