奥数-计算-平方差公式

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

📖 在线阅读

阿星精讲：平方差公式 原理

核心概念：想象一下，你有两块地砖，一块边长 a，另一块边长 b（假设 $a > b$）。它们的面积差 $a^2 - b^2$ 怎么算最快？不要傻傻地各自算平方再减！阿星的绝招是：把这两块砖拼起来玩！把大砖切掉一个宽为 b，长为 a 的条，剩下的“L”形面积不好算。但如果我们把这个“L”形剪开再拼成一个长方形，奇迹就发生了——这个新长方形的长正好是 $a + b$，宽正好是 $a - b$！所以，面积差 $a^2 - b^2$ 就等于 $(a + b)(a - b)$。这就叫“**平方差，变长方，长加宽减就搞定**”。就像 $100^2 - 99^2$，直接变形成 $(100 + 99) \times (100 - 99) = 199 \times 1 = 199$，口算秒杀！

计算秘籍：

识结构：看到“一项平方减另一项平方” $(\ )^2 - (\ \ )^2$，马上想到平方差公式。

定“a”与“b”：找准谁相当于公式中的 a，谁相当于 b。例如，在 $(2x)^2 - 3^2$ 中，$a = 2x$，$b = 3$。

套公式：结果等于 **(a+b)(a-b)**。即：$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$。

化简：合并同类项，得出最简结果。

阿星口诀：平方差，不可怕，同号相加异号减，两括号一相乘，复杂计算瞬简化。

⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：$(x - 2)^2 - (y + 1)^2 = [x - 2 + y + 1][x - 2 - y + 1]$

→ ☑ 正解：**每个括号整体看作“a”或“b”**，变换时原括号要保留。正确应为：$[(x - 2) + (y + 1)] \times [(x - 2) - (y + 1)] = (x + y - 1)(x - y - 3)$。

❌ 错误2：$4x^2-9y^4=(4x+9y^2)(4x-9y^2)$

→ ✅ 正解：**必须将各项都写成完全平方形式。**$4x^2=(2x)^2$，$9y^4=(3y^2)^2$，所以应为：$(2x+3y^2)(2x-3y^2)$。

🔥 例题精讲

例题1：计算 67^2-33^2。

📌 **解析：**

识别结构：两数平方相减，符合平方差公式。

设 $a=67$，$b=33$。

套用公式：$67^2-33^2=(67+33)\times(67-33)$。

化简计算：$=100\times 34=3400$。

✅ **总结：**碰到稍大数的平方差，直接利用公式化为整十整百数相乘，是速算的利器。

例题2：分解因式 $9m^2-16n^2$。

📌 **解析：**

识别结构：$9m^2=(3m)^2$，$16n^2=(4n)^2$，符合平方差。

设 $a=3m$，$b=4n$。

套用公式：$9m^2-16n^2=(3m)^2-(4n)^2=(3m+4n)(3m-4n)$。

✅ **总结：**因式分解时，关键在于将系数和变量都准确地写成平方形式，确定好“a”和“b”。

例题3：计算 $(x+y+1)(x-y-1)$。

📌 **解析：**

观察结构：两个括号内项数相同，且 x 同号，y、常数项异号，符合平方差公式的扩展形式。

重新分组：将 x 看作一项，$(y+1)$ 看作另一项。即：$[x+(y+1)]\times[x-(y+1)]$。

套用公式：上式 = $x^2-(y+1)^2$。

继续展开：$=x^2-(y^2+2y+1)=x^2-y^2-2y-1$。

☑ **总结：**当括号内是多项式时，巧妙分组，将符号相同的部分整体视为“a”，符号相反的部分整体视为“b”，是破解此类问题的核心心法。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

计算 25^2-15^2。

分解因式 x^2-9。

计算 101^2-99^2。

分解因式 $4a^2-1$。

计算 $(8+7)(8-7)$。

分解因式 $16-y^4$。

计算 53×47。（提示：$53\times 47=(50+3)(50-3)$）

分解因式 $25p^2-49q^2$。

计算 $(m+5)(m-5)$。

分解因式 $0.04x^2-0.09y^2$。

二、奥数挑战

计算 2024^2-2023^2。

分解因式 $(2a-b)^2-(a+2b)^2$。

已知 $x^2-y^2=12$，$x-y=3$，求 $x+y$ 的值。

计算 $123456789^2+123456788\times 123456790$。（提示：后一项用平方差）

分解因式 x^4-81。

证明：连续两个奇数的平方差是8的倍数。

计算 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\dots(1-\frac{1}{10^2})$。

分解因式 $x^2-(y+z)^2$。

若 $m^2-n^2=24$，且 m,n 都是正整数，$m>n$，求 m,n 的所有可能值。

计算 $2025^2-2024\times 2026$。

第三关：生活应用（5道）

（AI数据压缩） 在机器学习中，一个特征向量大小为 1024^2 字节，经过优化后降为 1020^2 字节。请用平方差公式快速计算节省了多少字节的存储空间？

（航天轨道） 已知某卫星近地点距离地球表面 $(R+h_1)$ 公里，远地点距离 $(R+h_2)$ 公里（R 为地球半径）。其椭圆轨道长轴的长度与短轴的长度满足某种平方差关系。若长轴 $2a=R+h_1+R+h_2$，短轴 $2b$ 满足 $a^2-b^2=c^2$（c 为焦距）。请用 R,h_1,h_2 表示 c。

（网购优惠） 一件商品原价 $(n+50)$ 元，“双十一”期间领券后价格为 $(n-50)$ 元。请用平方差公式表示你节省了多少钱（用关于 n 的式子表示）。

（密码学） 古老的RSA公钥密码算法中，密钥生成依赖于大数的质因数分解。比如，计算 107^2-93^2 很容易，但反过来，如果将 107×93 告诉你，你能快速利用平方差公式心算出它等于多少吗？试试计算 107×93。

（像素屏幕） 新款手机屏幕分辨率是 $(1920+k)\times(1080+k)$ 像素，旧款是 $(1920-k)\times(1080-k)$ 像素（$k>0$）。请用平方差公式说明新款比旧款多出了多少个像素点？（结果用 k 表示）

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：平方差公式 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难点通常不在计算，而在“识别”和“转化”。学生容易僵化地认为公式里的 a 和 b 必须是单项式。实际上，它们可以是任何代数式，如数字、字母、甚至一个多项式整体（如 $(x+y)$）。核心障碍是**未能从“两项平方差”的表面形式，抽象出“两数和与两数差相乘”的等价结构**。比如看到 $(x+y+1)(x-y-1)$ 就不敢用公式了。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：平方差公式是代数大厦的“基石”之一。它的直接应用在：

因式分解：是化简复杂代数式、解高次方程的基础。

根式有理化：例如 $\frac{1}{a+\ \ b} = \frac{a-\ \ b}{a-b}$，原理就是分子分母同乘以平方差中的另一项。

三角函数：恒等式如 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 的变形中常有平方差身影。

复数：复数的乘法与模长公式 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ 也蕴含此思想。

它训练的是“等价变形”和“整体代换”的数学核心思维，这种思维在后续所有数学学习中至关重要。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！核心套路就是：**“寻找平方差结构”**。具体步骤如下：

判形态：遇到计算或式子，先看是否是 $()^2 - ()^2$ 或可以化成这种形式。

定整体：确定哪个部分可以看作公式中的“a”，哪个是“b”。它们可能是数字、字母、或多个项的组合。

代公式：毫不犹豫地写成 $(a+b)(a-b)$。

巧验证：心算展开 $(a+b)(a-b)$ 是否等于原式，防止符号错误。

记住这个流程图，并配合大量练习形成条件反射，你就能一眼看穿题目本质。例如，看到 2023×2025，立刻想到 $(2024-1)(2024+1) = 2024^2 - 1$，这就是高手的直觉。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$25^2 - 15^2 = (25+15) \times (25-15) = 40 \times 10 = 400$
$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$
$101^2 - 99^2 = (101+99)(101-99) = 200 \times 2 = 400$
$4a^2 - 1 = (2a)^2 - 1^2 = (2a+1)(2a-1)$
$(8+7)(8-7) = 8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15$

$16-y^4=4^2-(y^2)^2=(4+y^2)(4-y^2)=(4+y^2)(2+y)(2-y)$
$53\times47=(50+3)(50-3)=50^2-3^2=2500-9=2491$
$25p^2-49q^2=(5p)^2-(7q)^2=(5p+7q)(5p-7q)$
$(m+5)(m-5)=m^2-5^2=m^2-25$
$0.04x^2-0.09y^2=(0.2x)^2-(0.3y)^2=(0.2x+0.3y)(0.2x-0.3y)$

二、奥数挑战

$2024^2-2023^2=(2024+2023)(2024-2023)=4047\times1=4047$
设 $a_1=2a-b$， $b_1=a+2b$。原式 $=[(2a-b)+(a+2b)][(2a-b)-(a+2b)]=(3a+b)(a-3b)$
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=12$，代入 $x-y=3$，得 $(x+y)\times3=12$，故 $x+y=4$。
设 $n=123456789$，则原式 $=n^2+(n-1)(n+1)=n^2+(n^2-1)=2n^2-1$。
$x^4-81=(x^2)^2-9^2=(x^2+9)(x^2-9)=(x^2+9)(x+3)(x-3)$
设连续两个奇数为 $2n+1$， $2n+3$。$(2n+3)^2-(2n+1)^2=[(2n+3)+(2n+1)][(2n+3)-(2n+1)]=(4n+4)\times2=8(n+1)$，是8的倍数。
原式 $=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{10})(1+\frac{1}{10})$，前后项连续约分，最后得 $\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}$。
$x^2-(y+z)^2=[x+(y+z)][x-(y+z)]=(x+y+z)(x-y-z)$
$(m+n)(m-n)=24$。因为 m,n 为正整数，$m>n$，且 $m+n$ 与 $m-n$ 同奇偶。将24分解为两个同奇偶的因数：12×2 或 6×4。解方程组得：$(m,n)=(7,5)$ 或 $(5,1)$。
$2025^2-2024\times2026=2025^2-(2025-1)(2025+1)=2025^2-(2025^2-1)=1$。

第三关：生活应用

节省空间 $=1024^2-1020^2=(1024+1020)\times(1024-1020)=2044\times4=8176$ 字节。
由 $a=(2R+h_1+h_2)/2$， $a^2-b^2=c^2$。且根据椭圆性质， $c=\frac{(R+h_2)-(R+h_1)}{2}=\frac{h_2-h_1}{2}$。(这里用平方差公式， $a^2-c^2=b^2$，但直接求 c 更简单)
节省的钱 $=(n+50)^2-(n-50)^2=[(n+50)+(n-50)]\times[(n+50)-(n-50)]=(2n)\times(100)=200n$ 元。
$107\times93=(100+7)(100-7)=100^2-7^2=10000-49=9951$。
多的像素点 $=(1920+k)(1080+k)-(1920-k)(1080-k)$。将前一项看作 $(A+k)(B+k)=AB+k(A+B)+k^2$，后一项看作 $(A-k)(B-k)=AB-k(A+B)+k^2$。相减得：$2k(A+B)=2k(1920+1080)=2k\times3000=6000k$。(也可直接用平方差公式，设 $a=1920+k,b=1080-k$，但整体处理更简洁)

更多练习题

奥数-计算-定义新运算逆推

12-19

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19

奥数-计算-高斯求和公式

12-19

奥数-计算-等差数列求项数

12-19

奥数-计算-繁分数化简

12-19