

奥数-计算-定义新运算逆推

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

💡 阿星精讲：定义新运算：逆运算 原理

核心概念：嗨，我是阿星！想象一下，我们定义了一个新运算“ $*$ ”，它就像一个神秘的“魔法机器”。你塞进去两个数，它会按照自己独特的规则吐出一个新数。现在，题目告诉你：某个数 x 经过这台“魔法机器”和 3 一起加工后，吐出了 15，也就是 $x * 3 = 15$ 。求 x 是多少？这不就是让我们当侦探吗？“**已知结果和规则，反推原料！**”这就像解方程 $x + 3 = 15$ ，我们用到逆运算“减”。所以，面对新运算，我们的法宝就是：“**把新运算等式看成方程，利用其定义，反着解出来！**”

计算秘籍：

锁定定义：仔细阅读题目给出的新运算定义式，例如 $a * b = 2a + b$ 。

列写方程：将题目条件（如 $x * 3 = 15$ ）严格按照定义“翻译”成常规运算方程。即用 x 替换定义中的 a ，用 3 替换 b ，得到 $2x + 3 = 15$ 。

逆向求解：把这个方程当作老朋友来解，使用加、减、乘、除的逆运算来求出未知数 x 。 $2x + 3 = 15 \Rightarrow 2x = 15 - 3 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 12 \div 2 \Rightarrow x = 6$ 。

验算：将解得的 x 代入原定义验算： $6 * 3 = 2 \times 6 + 3 = 15$ ，完美！

阿星口诀：新运算，像机器，结果已知反推易。严格套定义，翻译成方程，逆着解，别怀疑！

⚠ 易错警示：避坑指南

✗ 错误1：看到“逆”字，不假思索就用减法或除法。例如，已知 $a * b = a + 2b$ ，且 $x * 3 = 11$ ，错误地做 $x = 11 - 3 = 8$ 或 $x = 11 \div 3$ 。

✓ 正解：必须依据定义将等式“翻译”成方程： $x + 2 \times 3 = 11$ ，即 $x + 6 = 11$ ，然后正确逆解： $x = 11 - 6 = 5$ 。

✗ 错误2：求逆运算时，运算顺序搞反。例如，定义 $m \Delta n = m \times (n + 1)$ ，已知 $2 \Delta y = 8$ ，错误列式： $2 \times y + 1 = 8$ 。

✓ 正解：定义是 m 乘以 $(n + 1)$ 。所以正确翻译： $2 \times (y + 1) = 8$ 。逆解时，先除以 2： $y + 1 = 4$ ，再减 1： $y = 3$ 。

🔥 例题精讲

例题1：规定 $a * b = a + b \times 2$ ，已知 $4 * x = 14$ ，求 x 。

🔑 解析：

根据定义翻译： $4 * x = 4 + x \times 2$ 。

建立方程： $4 + 2x = 14$ 。

逆向求解： $2x = 14 - 4 = 10$ ，所以 $x = 10 \div 2 = 5$ 。

✓ 总结：心法：定义中的运算顺序是“加”和“乘”，列方程时要确保 x 的系数正确。

例题2：规定 $x \oplus y = (x + y) \div 2$ ，已知 $m \oplus 6 = 5$ ，求 m 。

🔑 解析：

根据定义翻译： $m \oplus 6 = (m + 6) \div 2$ 。

建立方程： $(m + 6) \div 2 = 5$ 。

逆向求解（先消除法，再消加法）：

第一步： $m + 6 = 5 \times 2 = 10$ 。

第二步： $m = 10 - 6 = 4$ 。

✓ 总结：心法：等号右边是一个整体运算 $(m + 6) \div 2$ ，逆解时需从外向内“剥洋葱”，顺序与计算顺序相反。

例题3：定义运算 $A \nabla B$ 表示 A 的 3 倍减去 B 的一半。若 $7 \nabla k = 16$ ，求 k 。

🔑 解析：

将文字定义转化为算式： $A \nabla B = 3 \times A - B \div 2$ 。

代入数字翻译： $7\triangledown k = 3 \times 7 - k \div 2 = 21 - k \div 2$ 。

建立方程： $21 - \frac{k}{2} = 16$ 。

逆向求解：

第一步：把 $-\frac{k}{2}$ 看作一个整体，21 减去它等于 16，所以这个整体等于 $21 - 16 = 5$ 。即 $-\frac{k}{2} = 5$ 。

第二步：两边乘以 -1 ： $\frac{k}{2} = -5$ 。

第三步：两边乘以 2： $k = -10$ 。

验算： $7\triangledown(-10) = 3 \times 7 - (-10) \div 2 = 21 - (-5) = 26$ ？等等，算错了。仔细看： $21 - (-10) \div 2 = 21 - (-5) = 21 + 5 = 26 \neq 16$ 。检查第4步： $21 - \frac{k}{2} = 16 \Rightarrow -\frac{k}{2} = 16 - 21 = -5 \Rightarrow \frac{k}{2} = 5 \Rightarrow k = 10$ 。验算： $21 - 10/2 = 21 - 5 = 16$ ，正确。要细心！

☑ 总结：心法：文字定义翻译要精准；解方程时步步为营，移项、变号要细心，最后务必验算。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

若 $a * b = a + b$ ，且 $5 * x = 12$ ，求 x 。

若 $m \diamond n = m \times n - n$ ，且 $4 \diamond y = 14$ ，求 y 。

规定 $p \circ q = 2p + 3q$ ，已知 $1 \circ x = 11$ ，求 x 。

定义 $x \otimes y = y - x$ ，已知 $2 \otimes z = 7$ ，求 z 。

若 $a \star b = (a + b) \times 2$ ，且 $3 \star k = 18$ ，求 k 。

规定 $A \setminus B = A \times B + A$ ，已知 $2 \setminus t = 8$ ，求 t 。

若 $f * g = f^2 - g$ ，且 $3 * m = 5$ ，求 m 。（提示： f^2 表示 $f \times f$ ）

定义 $M \oplus N = \frac{M+N}{2}$ ，已知 $x \oplus 10 = 8$ ，求 x 。

规定 $a \# b = 5a - 2b$ ，已知 $4 \# n = 2$ ，求 n 。

若 $x \nabla y = x \div y + 1$ ，且 $12 \nabla b = 4$ ，求 b 。

二、奥数挑战

定义运算 $a \circledast b$, 使得 $a \circledast b = 2a^b$ 。若 $3 \circledast x = 54$, 求 x 。(提示: 考虑因数分解)

对于整数 a, b , 规定 $a \triangle b$ 表示从 a 开始, 后面连续的 b 个整数的和。例如: $3 \triangle 2 = 3 + 4 = 7$ 。若 $x \triangle 3 = 24$, 求 x 。

设 x, y 是两个自然数, 定义 $x \ast y = (x + y) \times (x - y + 1)$ 。如果 $5 \ast m = 36$, 求 m 。

已知新运算: $[a] = 2a + 1$, $\{b\} = b^2 - 1$ 。若 $[x] + \{x\} = 29$, 求 x 。

规定 $A \blacktriangledown B$ 表示 A 和 B 的平均数, $A \blacktriangle B$ 表示 A 和 B 的差 (大减小)。已知 $(5 \blacktriangledown x) \blacktriangle 3 = 2$, 求 x 。

定义 $f(n) = n \times (n + 1)$ 。若 $f(a) - f(a - 1) = 50$, 求 a 。

运算“&”满足交换律: $a \& b = b \& a$, 且满足 $a \& (b + c) = a \& b + a \& c$ 。若 $2 \& 5 = 16$, 且 $3 \& x = 33$, 求 x 。

已知 $1! = 1, 2! = 1 \times 2, 3! = 1 \times 2 \times 3, \dots$ 。若 $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$, 求 n 。 (“!”表示阶乘)

定义 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[3.2] = 3$ 。若 $[2x + 1] = 7$, 求 x 的取值范围。

有一种运算, 对于任意两个数 a, b , 有 $a \odot b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 。若 $(x \odot 2) - (2 \odot x) = \frac{3}{2}$, 求 x 。

第三关: 生活应用 (5道)

【AI提示词】阿星设计了一个AI图像生成器的“风格混合”运算公式: 图片A 混合 图片B = $0.7 \times A + 0.3 \times B$ 。某次混合后, 得到的图片数值为 85, 已知图片A的数值为 100, 请问图片B的数值是多少?

【航天轨道】在模拟计算中, 飞船从轨道1变轨到轨道2所需的能量 ΔE 定义为: $\Delta E = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$ 。若已知飞船质量 $m = 1000$, 初速度 $v_1 = 8$, 所需能量 $\Delta E = 21000$, 求目标轨道速度 v_2 。

【网购优惠】某平台“星火券”的叠加使用规则定义为: 订单满 a 元, 使用 b 张券后实付金额为 $a \times 0.9^b$ 元。小星用券后实付 72.9 元, 已知原订单金额为 100 元, 请问她使用了几张券?

【数据压缩】一种简单的数据压缩算法用运算 $C(x) = 2x + 128$ 表示编码。现在收到一段解码后的原始数据是 200, 请问它被压缩前的原始编码值 x 是多少?

【密码学】在一种古典密码中，明文字母 p 通过密钥 k 加密成密文字母 c 的规则是： $c = (p + k) \bmod 26$ （将字母按顺序编号为 0 到 25）。如果已知密文 $c = 7$ ，密钥 $k = 15$ ，求原文 p 。（提示：模运算的逆运算需考虑在 0~25 范围内求解）

🧠 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：定义新运算：逆运算 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难在两点。一是“符号恐惧症”：看到陌生的 $*$, \diamond , \oplus 就心里发怵，忘记了它们只是加、减、乘、除等基本运算换了个“马甲”。二是思维定式：学生习惯了 $+$, $-$, \times , \div 有固定的逆运算（如加的逆是减）。但在新运算中，逆解的过程是**动态的**，完全取决于定义。例如，对于 $a * b = a^2 + b$ ，求 $x * 2 = 8$ 中的 x ，就需要解 $x^2 + 2 = 8$ ，其“逆运算”涉及开平方，这和单纯的减法是不同的。关键是把新运算等式看成一个等待被拆解的**方程模型**。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大，这是培养**代数思维**和**函数思想**的绝佳起点。1. **方程思想**：它训练你从“算术”的按步骤计算，转向“代数”的设立未知数、构建等式、求解未知数。2. **函数映射**：新运算 $f(a, b)$ 可以看作一个二元函数。求逆运算，相当于知道了函数输出和部分输入，求另一部分输入，这直接关联到未来高中学习的**反函数**概念 $f^{-1}(x)$ 。3. **抽象与建模**：现实世界中的很多规则（如折扣计算、物理公式）都可以抽象成运算，求解未知量就是逆运算过程。这部分学习是迈向高阶数学的基石。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！请严格遵循以下“**翻译-逆解**”两步法套路：

翻译：无论符号多奇怪，都坚定地把它按照题目给出的定义，“一词一句”地翻译成含有未知数 x 的常规数学算式（方程）。这是最重要的一步，绝对不能跳步或凭感觉。

逆解：把这个翻译好的方程，用你最熟悉的解方程方法（等式的性质：同加同减、同乘同除）求解。本质就是一步步“**撤销**”原运算对 x 施加的影响，顺序通常与计算顺序相反。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$$5 + x = 12 \Rightarrow x = 7$$

$$4 \times y - y = 14 \Rightarrow 3y = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{3}$$

$$2 \times 1 + 3x = 11 \Rightarrow 2 + 3x = 11 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

$$z - 2 = 7 \Rightarrow z = 9$$

$$(3 + k) \times 2 = 18 \Rightarrow 3 + k = 9 \Rightarrow k = 6$$

$$2 \times t + 2 = 8 \Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = 3$$

$$3^2 - m = 5 \Rightarrow 9 - m = 5 \Rightarrow m = 4$$

$$\frac{x+10}{2} = 8 \Rightarrow x + 10 = 16 \Rightarrow x = 6$$

$$5 \times 4 - 2n = 2 \Rightarrow 20 - 2n = 2 \Rightarrow 2n = 18 \Rightarrow n = 9$$

$$12 \div b + 1 = 4 \Rightarrow 12 \div b = 3 \Rightarrow b = 4$$

二、奥数挑战

$$2 \times 3^x = 54 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 24 \Rightarrow 3x + 3 = 24 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$(5 + m) \times (5 - m + 1) = 36 \Rightarrow (5 + m)(6 - m) = 36$ 。展开： $30 - 5m + 6m - m^2 = 36 \Rightarrow -m^2 + m + 30 = 36 \Rightarrow -m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 - m + 6 = 0$ ，判别式小于0，无实数解？检查： $(5 + m)(6 - m) = 36$ ，试数：若 $m = 2$ ，左边 $(7)(4) = 28$ ； $m = 3$ ，左边 $(8)(3) = 24$ ； $m = 6$ ，左边 $(11)(0) = 0$ ； $m = 0$ ，左边 $(5)(6) = 30$ 。可能题目有误或需考虑其他情况。若 $5 - m + 1 = 6 - m$ ，试 $m = -3$ ：左边 $(2)(9) = 18$ ； $m = -2$ ：左边 $(3)(8) = 24$ ； $m = -1$ ：左边 $(4)(7) = 28$ ； $m = -6$ ：左边 $(-1)(12) = -12$ 。似乎无整数解。解析保留思考过程，说明有时方程可能无（整数）解。

$[x] = 2x + 1, \{x\} = x^2 - 1$ 。方程： $(2x + 1) + (x^2 - 1) = 29 \Rightarrow x^2 + 2x = 29 \Rightarrow x^2 + 2x - 29 = 0$ ，解得 $x = -1 \pm \sqrt{30}$ 。

$5 \blacktriangledown x = \frac{5+x}{2}$ 。则 $(\frac{5+x}{2}) \blacktriangle 3 = |\frac{5+x}{2} - 3| = 2$ 。所以 $\frac{5+x}{2} - 3 = 2$ 或 $\frac{5+x}{2} - 3 = -2$ 。解得：① $\frac{5+x}{2} = 5 \Rightarrow 5 + x = 10 \Rightarrow x = 5$ ；② $\frac{5+x}{2} = 1 \Rightarrow 5 + x = 2 \Rightarrow x = -3$ 。

$f(a) = a(a+1), f(a-1) = (a-1)a$ 。相减: $a(a+1) - a(a-1) = a[(a+1) - (a-1)] = a \times 2 = 2a = 50 \Rightarrow a = 25$ 。

由分配律 $a \& (b+c) = a \& b + a \& c$, 且 $2 \& 5 = 16$ 。求 $3 \& x = 33$ 。注意到运算可能定义为 $a \& b = a \times b + c$ (c 为常数)? 或 $a \& b = k \times a \times b$? 由 $2 \& 5 = 16$, 若是乘法形式, 则 $k \times 2 \times 5 = 10k = 16 \Rightarrow k = 1.6$ 。则 $3 \& x = 1.6 \times 3 \times x = 4.8x = 33 \Rightarrow x = 6.875$ 非整数。考虑另一种: 定义可能是 $a \& b = a^2 + b^2$? $2^2 + 5^2 = 29 \neq 16$ 。 $a \& b = a \times b + a + b$? $2 \times 5 + 2 + 5 = 17 \neq 16$ 。 $a \& b = a \times b + 2a$? $10 + 4 = 14 \neq 16$ 。 $a \& b = a \times b + \frac{a+b}{2}$? $10 + 3.5 = 13.5$ 。尝试 $a \& b = 2a + 2b$? $4 + 10 = 14$ 。 $a \& b = 2(a+b)$? $2 \times 7 = 14$ 。 $a \& b = 3a + b$? $6 + 5 = 11$ 。观察 16 和 33, 发现 $33 - 16 = 17$, 而 $3 - 2 = 1, x - 5$ 未知。这题需要更多条件。假设运算是线性的: $a \& b = p \cdot a + q \cdot b$ 。则 $2p + 5q = 16, 3p + qx = 33$ 。两个方程三个未知数, 无法确定。原题可能设计为满足特定形式的运算, 如 $a \& b = a \times b + 6$? $2 \times 5 + 6 = 16$ 成立! 则 $3 \& x = 3x + 6 = 33 \Rightarrow 3x = 27 \Rightarrow x = 9$ 。解析时可采用此合理假设。

$\frac{n!}{(n-2)!} = n \times (n-1) = 30$ 。解 $n^2 - n - 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Rightarrow n = 6$ (n 为正整数)。

$[2x+1] = 7 \Rightarrow 7 \leq 2x+1 < 8 \Rightarrow 6 \leq 2x < 7 \Rightarrow 3 \leq x < 3.5$ 。

$x \odot 2 = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, 2 \odot x = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ 。两者相等, 差为 0, 不可能等于 $\frac{3}{2}$ 。除非运算不满足交换律? 但题目定义是 $a \odot b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, 显然满足交换律。因此原方程化为 $0 = \frac{3}{2}$, 矛盾。题目可能有误, 或运算符内外有别? 解析指出矛盾。

第三关: 生活应用

$0.7 \times 100 + 0.3 \times B = 85 \Rightarrow 70 + 0.3B = 85 \Rightarrow 0.3B = 15 \Rightarrow B = 50$

$\frac{1}{2} \times 1000 \times (v_2^2 - 8^2) = 21000 \Rightarrow 500(v_2^2 - 64) = 21000 \Rightarrow v_2^2 - 64 = 42 \Rightarrow v_2^2 = 106 \Rightarrow v_2 = \sqrt{106} \approx 10.3$ (取正值)。

$100 \times 0.9^b = 72.9 \Rightarrow 0.9^b = 0.729$ 。因为 $0.9^3 = 0.729$, 所以 $b = 3$ 。

解方程 $2x + 128 = 200 \Rightarrow 2x = 72 \Rightarrow x = 36$ 。

方程: $(p+15) \bmod 26 = 7$ 。这意味着 $p+15$ 除以 26 余数为 7, 所以 $p+15$ 可能等于 7, 33, 59... 在 0~25 范围内, p 也在此范围。若 $p+15 = 7 \Rightarrow p = -8$ 不符。若 $p+15 = 33 \Rightarrow p = 18$ 。若 $p+15 = 59 \Rightarrow p = 44$ 不符。所以 $p = 18$ 。

更多精彩内容请访问 星火网 www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19

奥数-计算-高斯求和公式

12-19

奥数-计算-等差数列求项数

12-19

奥数-计算-繁分数化简

12-19

奥数-计算-分数整体约分

12-19

