奥数-计算-完全平方数特征

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：完全平方数 原理

核心概念： 大家好，我是阿星！想象一下，每个数字都有一个独一无二的“光波指纹”。当我们对一个整数进行“平方”操作（比如 5×5）时，这个“指纹”会发生变化，但变化的规律是固定的！最神奇的是，所有完全平方数的“个位指纹”——也就是尾数——只能是 $0, 1, 4, 5, 6, 9$ 这六个数字之一。为什么 $2, 3, 7, 8$ 被淘汰了呢？因为它们的平方运算后，个位数永远变不出自己！比如，你用尾数为 2 或 8 的数去平方，个位结果一定是 4；用尾数为 3 或 7 的数去平方，个位结果一定是 9。所以，当我们看到一个尾数是 $2, 3, 7, 8$ 的数，就像阿星用“光波探测器”扫了一下，立刻可以报警：“这不是完全平方数，请排除！”

计算秘籍：

验证完全平方数： 判断 n 是否为完全平方数，本质是看是否存在整数 k 使得 $k^2 = n$。例如，判断 961：先估算范围， $30^2 = 900$， $31^2 = 961$，所以 $961 = 31^2$，它是。

快速心算尾数： 记住 0 到 9 平方的个位规律：$0^2 \to 0$， $1^2 \to 1$， $2^2 \to 4$， $3^2 \to 9$， $4^2 \to 6$， $5^2 \to 5$， $6^2 \to 6$， $7^2 \to 9$， $8^2 \to 4$， $9^2 \to 1$。你会发现，结果的个位数字不包含 $2, 3, 7, 8$。

阿星口诀： 平方尾数有玄机，零一四五九和六；二三七八请出局，光波一扫现原形！

⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：看到一个尾数是 $0, 1, 4, 5, 6, 9$ 的数，就断定它一定是完全平方数。 → ✅ 正解：尾数符合只是“必要条件”，不是“充分条件”。例如，26 的尾数是 6，但 $5^2 = 25$， $6^2 = 36$，所以 26 不是完全平方数。必须结合其他方法（如估算、质因数分解）综合判断。

❌ 错误2：只记口诀，不理解原理。遇到如“哪些数的平方尾数是 4”这类反向问题时，容易出错。 → ✅ 正解：要从原理出发。平方尾数为 4，说明原数的尾数只能是 2 或 8。因为只有 $2^2=4$ 和 $8^2=64$（个位为 4）。

🔥 例题精讲

例题1： 判断下列哪个数**不可能**是一个完全平方数？ A. 1234 B. 5776 C. 8888 D. 1521

📌 **解析：**

启动光波扫描（看尾数）： A尾数是 4，B尾数是 6，C尾数是 8，D尾数是 1。口诀提示，尾数为 $2,3,7,8$ 的数不可能是完全平方数。

锁定目标： C选项 8888 的尾数是 8，直接淘汰。

虽然其他选项尾数“合法”，但题目问“不可能”，所以答案是C。我们可以快速验证：$94^2=8836$， $95^2=9025$， 8888 确实在中间，不是平方数。

✅ **总结：**“不可能类”题目，优先使用尾数排除法，效率最高！

例题2： 一个四位完全平方数，它的千位和个位数字相同，十位和百位数字也相同。这个数是多少？

📌 **解析：**

设这个四位数为 $aabb$ 的形式，即 $1000a+100a+10b+b=1100a+11b=11(100a+b)$。

因为它是完全平方数，且含有因数 11，所以 $100a+b$ 也必须被 11 整除，即 $100a+b$ 是 11 的倍数。

同时，它是一个平方数，所以它应该是 $11^2=121$ 的倍数。设 $aabb=121\times k^2$。

$aabb=11\times(100a+b)$，所以 $100a+b=11\times k^2$。且 $100a+b$ 是一个三位数。

尝试 k^2：当 $k^2=64$ 时， $100a+b=11\times 64=704$，此时 $a=7,b=4$，原数为 7744。

验证：$88^2=7744$， 完全符合条件。

✅ **总结：** 遇到特殊结构的数，先用代数式表示，寻找其数字特征和整除性质，再结合完全平方数的要求进行推理。

例题3： 已知 n 是正整数，且 $2n+1$ 和 $3n+1$ 都是完全平方数。求证：n 是 40 的倍数。

解析：

设 $2n+1=a^2$， $3n+1=b^2$，其中 a,b 为正整数。

由第一式得 $n=\frac{a^2-1}{2}$。观察 a^2， 因为 $2n+1$ 是奇数，所以 a 必为奇数，设 $a=2k+1$。

则 $n=\frac{(2k+1)^2-1}{2}=\frac{4k^2+4k}{2}=2k(k+1)$。这说明 n 是偶数，且是 4 的倍数（因为 k 和 $k+1$ 一奇一偶，乘积是偶数，再乘以 2）。

现在需要证明 n 也是 5 的倍数。考虑 $b^2-a^2=(3n+1)-(2n+1)=n$。所以 $n=(b-a)(b+a)$。

一个完全平方数模 5 的余数只能是 $0,1,4$。分别讨论 $a^2 \mod 5$ 的情况，并推导 $n \mod 5$ 的情况，可以证明 n 必然是 5 的倍数（此过程略，为奥数经典结论）。

因为 n 既是 4 的倍数，又是 5 的倍数，且 4 和 5 互质，所以 n 是 $4\times5=20$ 的倍数。进一步分析奇偶性等（或通过模 8 分析），可加强结论为 n 是 40 的倍数。

总结：高级证明题中，完全平方数的性质（奇偶性、模 $3,4,5,8$ 的余数）是强大的推理工具，常通过设未知数和代数变换来建立等式关系。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

判断：1024 是不是完全平方数?

判断：尾数是 7 的数，有可能是完全平方数吗?

平方后个位是 9 的数，它的个位可能是几?

在 1 到 100 中，有多少个完全平方数?

计算：$47^2-46^2=?$ （利用平方差公式）

一个两位数的完全平方数，它的个位数字是 6，这个数可能是多少?

$(\quad 81+\quad 25)^2=?$

已知 $x^2=2025$， 求正整数 x。

连续两个正整数的平方和是 145，求这两个数。

一个自然数减去 45 后是一个完全平方数，加上 44 后也是完全平方数，求这个数。

二、奥数挑战

有一个完全平方数，它前两位数字相同，后两位数字也相同，求这个四位数。

证明：四个连续正整数的乘积加 1 是一个完全平方数。

若 n 是正整数，且 $n^2+19n+48$ 是一个完全平方数，求 n 的值。

求满足方程 $m^2+2n^2=3mn+1$ 的所有正整数对 (m,n)。

已知 p 是质数，且 p^3+2 也是质数，证明：p^3+2 是完全平方数。

一个正整数恰好等于它的各位数字之和的平方，求这个数。

求所有的正整数 n，使得 $n^2-19n+99$ 是完全平方数。

设 n 是正整数，若 $2^8+2^{11}+2^n$ 是一个完全平方数，求 n。

已知 a,b 是正整数，且 $ab+1$ 整除 a^2+b^2。证明：$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是完全平方数。

求所有的正整数 x,y，满足 $x^2+y^2=2024$。

第三关：生活应用（5道）

【编程优化】阿星在写一个判断完全平方数的函数。输入一个范围在 1 到 10^{18} 的整数，请设计一个高效算法，并解释为什么不能只靠检查个位数?

【AI图像】一张分辨率为 4096×4096 的正方形图片，总像素点是不是一个完全平方数？如果要将它无损压缩成另一个正方形分辨率，可能的最大正方形边长是多少（小于原边长）？

【密码学】一种简单的密码利用完全平方数：密文是一个完全平方数，明文是其平方根。如果收到的密文是 1739764，请破解明文。

【航天轨道】开普勒第三定律指出，行星公转周期 T 的平方与轨道半长轴 a 的立方成正比，即 $T^2\propto a^3$。若地球周期为 1 年，半长轴为 1 AU。火星半长轴约为 1.524 AU，其周期的平方大约是多少？这接近一个完全平方数吗?

【网购凑单】某商品单价 m 元（m 是完全平方数），满 n 件打八折（n 也是完全平方数）。小星发现，无论按原价买 n 件，还是打折后买 n 件，总价都是一个完全平方数。已知 $1<m<n<100$，求 m 和 n。

常见疑问 FAQ

专家问答：完全平方数 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要有两个误区：一是**孤立记忆**，只背“尾数规律”等结论，却不理解其来自 $(10k+d)^2$ 展开式中个位只与 d^2 有关的数理本质 $(10k+d)^2=100k^2+20kd+d^2$。二是**缺乏数感**，对于 $20^2=400$， $25^2=625$ 等常见平方数不熟悉，无法快速估算。解决之道是**理解推导**，并建立 1 到 31 的平方表数感。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：完全平方数是整个代数体系的“基石”之一。1. **数论基础**：它是理解平方剩余、佩尔方程、勾股数组的起点。2. **代数核心**：配方法 $ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的灵魂就是构造完全平方。3. **几何关联**：平方数对应着正方形面积，是连接算术与几何的桥梁。4. **高级思维**：证明中常用的“无穷递降法”常针对平方数进行。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：对于“证明或寻找完全平方数”的问题，可以遵循以下**三板斧套路**：1. **看尾巴**：用尾数规律 $(0,1,4,5,6,9)$ 快速排除或缩小范围。2. **估范围**：设未知数 $k^2=N$， 对 N 开方估算 k 的范围，通常 $\lfloor \ N\rfloor \le k \le \lceil \ N\rceil$。3. **分解质因数**：完全平方数的每个质因数的指数都是偶数。即若 $N=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots$， 则 $a_1,a_2,\ldots$ 全是偶数。综合运用这三步，绝大多数题目都能找到突破口。

参考答案与解析

第一关：

是。 $1024=32^2$。

不可能。平方数的尾数不可能是 $2,3,7,8$。

个位可能是 3 或 7。因为 $3^2=9$， $7^2=49$。

10 个。 1^2 到 10^2。

$47^2-46^2=(47+46)(47-46)=93\times 1=93$。

可能是 16 或 36 或 64 或 96。验证：$4^2=16$， $6^2=36$， $8^2=64$， $14^2=196$（非两位），所以两位数的有 $16,36,64$。注意 96 不是平方数。

$(\quad 81+\quad 25)^2=(9+5)^2=14^2=196$。

$\quad 2025=45$。因为 $2025=81\times 25=9^2\times 5^2=(45)^2$。

设两个数为 $n,n+1$。 $n^2+(n+1)^2=145\Rightarrow 2n^2+2n+1=145\Rightarrow n^2+n-72=0\Rightarrow (n+9)(n-8)=0\Rightarrow n=8$。两数为 8 和 9。

设该数为 x，两个平方数分别为 a^2,b^2，且 $b^2>a^2$。则 $b^2-a^2=(x+44)-(x-45)=89$。即 $(b-a)(b+a)=89$，由于 89 是质数，且 $b+a>b-a>0$， 所以 $b-a=1$， $b+a=89$。解得 $b=45,a=44$。所以 $x=a^2+45=44^2+45=1936+45=1981$。验证：$1981+44=2025=45^2$。

第二关 & 第三关解析略（供深度思考与教学讨论）：这些题目涉及更复杂的代数变形、数论定理（如二次丢番图方程、费马平方和定理等）和编程思维，建议在老师指导下或通过小组研讨完成。关键提示：第2关第2题，设四数为 $n-1,n,n+1,n+2$；第3关第1题，可结合二分查找法；第3关第3题，需对 1739764 开方。

更多练习题

奥数-计算-平方差公式

12-19

奥数-计算-定义新运算逆推

12-19

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19

奥数-计算-高斯求和公式

12-19

奥数-计算-等差数列求项数

12-19