分数裂项相消进阶秘籍：从1/(1×3)难题到小升初压轴题速解攻略

📝 分数巧算：裂项相消(进阶)　📅 刚刚　👁 0 次阅读

本资料为**小学数学 分数巧算：裂项相消(进阶)** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

📖 在线阅读

分数裂项相消进阶秘籍：从“1/(1×3)”难题速解，到小升初压轴题通关攻略

🔍 一、 阿星引路：这道经典题为何是“裂项”的黄金钥匙?

我们直接看阿星的提示：**计算 1/(1×3) + 1/(3×5) + 1/(5×7) + ...**

很多同学初次尝试会直接写：**1/(1×3) = 1/1 - 1/3**，但这样对吗？让我们验证一下：

- 左边 1/(1×3) = 1/3 ≈ 0.333...

- 右边 1/1 - 1/3 = 1 - 0.333... = 0.666...

明显不相等！问题出在哪里？

阿星的智慧点拨：因为分母的两个因数**差是2**，而不是1！当分母因式差为 n 时，拆分后必须在前端乘以 **1/n** 来“配平”。

正确拆分：1/(1×3) = **1/2** × (1/1 - 1/3)

验证：1/2 × (1 - 1/3) = 1/2 × (2/3) = 1/3 ✔ 完全正确！

这个“1/2”就是**平衡系数**，是裂项相消进阶的**核心钥匙**。

📚 二、 深度学习：裂项相消通用公式推导（初中生也能懂）

核心原理推导

我们研究通用形式：**1/[a×(a+d)]**，其中 d 是两数的差。

设它等于 **K × [1/a - 1/(a+d)]**，其中 K 是待求的平衡系数。

右边通分：K × [(a+d) - a] / [a×(a+d)] = K × d / [a×(a+d)]

要等于左边 1/[a×(a+d)]，则必须：

K × d = 1

因此：**K = 1/d**

🏆 裂项相消（进阶）黄金公式：

1/[n×(n+d)] = (1/d) × [1/n - 1/(n+d)]

立即应用

- 当 d=1（基础型）：1/[n×(n+1)] = 1/n - 1/(n+1)

- 当 d=2（阿星题）：1/[n×(n+2)] = **1/2** × [1/n - 1/(n+2)]

- 当 d=3：1/[n×(n+3)] = **1/3** × [1/n - 1/(n+3)]

🧩 三、 实战闯关：从基础到竞赛的4个阶梯

阶梯1：直接应用（巩固理解）

计算：1/(1×4) + 1/(4×7) + 1/(7×10) + ... + 1/(28×31)

分析：分母差 d=3，平衡系数 = 1/3

解：

原式 = 1/3 × [(1 - 1/4) + (1/4 - 1/7) + (1/7 - 1/10) + ... + (1/28 - 1/31)]

= 1/3 × [1 - 1/31] = 1/3 × 30/31 = **10/31**

阶梯2：系数变化（小升初高频）

计算：2/(1×3) + 2/(3×5) + 2/(5×7) + ... + 2/(19×21)

巧解：先提公因数2！

原式 = 2 × [1/(1×3) + 1/(3×5) + ... + 1/(19×21)]

= 2 × { 1/2 × [(1-1/3)+(1/3-1/5)+...+(1/19-1/21)] }

= 2 × 1/2 × [1 - 1/21] = **20/21**

阶梯3：隐藏的裂项（重点突破）

计算：1/(1×2×3) + 1/(2×3×4) + 1/(3×4×5) + ... + 1/(8×9×10)

高阶技巧：拆成两项差！

1/[n×(n+1)×(n+2)] = 1/2 × { 1/[n×(n+1)] - 1/[(n+1)×(n+2)] }

解：

原式 = 1/2 × [(1/(1×2)-1/(2×3)) + (1/(2×3)-1/(3×4)) + ... + (1/(8×9)-1/(9×10))]

= 1/2 × [1/(1×2) - 1/(9×10)] = 1/2 × (1/2 - 1/90) = **11/90**

阶梯4：综合应用（竞赛思维）

计算：1/(√1+√3) + 1/(√3+√5) + 1/(√5+√7) + ... + 1/(√99+√101)

绝妙转化：分母有理化 + 裂项！

1/(√n + √(n+2)) = [√(n+2) - √n] / [(n+2)-n] = **1/2 × [√(n+2) - √n]**

解：

原式 = 1/2 × [(√3-√1) + (√5-√3) + (√7-√5) + ... + (√101-√99)]

= 1/2 × [√101 - 1] = **(√101 - 1)/2**

💡 四、 学霸思维：5个必须掌握的裂项“变形记”

1. **分子不是1怎么办？**

- 例：3/(1×4) = (4-1)/(1×4) = 1/1 - 1/4（巧用分子差！）

2. **分母三个连续数相乘？**

- 通用：1/[n(n+1)(n+2)] = 1/2 × {1/[n(n+1)] - 1/[(n+1)(n+2)]}

3. **平方差裂项**：

- 1/(n^2-1) = 1/[(n-1)(n+1)] = 1/2 × [1/(n-1) - 1/(n+1)]

4. **等差分母裂项**：

- 1/[n(n+k)(n+2k)]（需要二次裂项，挑战思维！）

5. **裂和（加法裂项）**：

- n/[(n+1)×(n+2)] = 1/(n+1) + 1/(n+2)（反向思维！）

📝 五、 能力检测：5道经典练习题（附答案提示）

1. **基础**：1/(2×5) + 1/(5×8) + ... + 1/(29×32) = ?

（答案：1/3 × (1/2 - 1/32) = 5/32）

2. **提升**：1/(1×5) + 1/(5×9) + ... + 1/(37×41) = ?

（答案：1/4 × (1 - 1/41) = 10/41）

3. **挑战**：1/(1×2×3) + 1/(3×4×5) + 1/(5×6×7) + ... + 1/(99×100×101) = ?

（提示：先拆项，发现隔项相消）

4. **综合**：1/(1+√3) + 1/(√3+√5) + ... + 1/(√2021+√2023) = ?

（答案：(√2023 - 1)/2）

5. **竞赛**：1/(1^2-1) + 1/(3^2-1) + 1/(5^2-1) + ... + 1/(99^2-1) = ?

（提示：利用平方差公式裂项）

🎯 六、 常见错误警示与避坑指南

❌ **错误1**：忘记平衡系数

- “1/(1×4) = 1/1 - 1/4”（×）

- 正确：1/(1×4) = **1/3** × (1/1 - 1/4)

❌ **错误2**：消项时漏项

- 一定要写出前3项和后3项，确认消去规律

❌ **错误3**：项数计算错误

- 公式：项数 = (末项编号 - 首项编号)÷间隔 + 1

- 例：从1/(1×4)到1/(28×31)，项数 = (28-1)÷3 + 1 = 10项

☑️ **终极检查法**：取特例验证！

- 取n=1验证拆分公式是否正确

- 取前两项手动计算，看是否与公式结果一致

🌟 七、 总结升华：裂项相消的数学思想

裂项相消不仅是计算技巧，更是**转化与化归**数学思想的体现：

1. **分而治之**：复杂分数 → 简单分数差

2. ** telescoping（望远镜）**：中间项全部抵消，只留首尾

3. **模式识别**：识别分母结构，选择正确的裂项公式

掌握这套方法，你不仅能速解分数巧算题，更能培养出解决复杂问题的**结构化思维**——这正是数学学习的核心价值！

星火网 www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-几何-圆中方面积

12-19

奥数-几何-方中圆面积

12-19

奥数-几何-容斥求面积

12-19

奥数-几何-毕克定理

12-19

奥数-几何-沙漏模型

12-19

奥数-几何-燕尾模型逆推

12-19