奥数-计算-分数裂项基础

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：分数巧算：裂项相消(基础) 原理

核心概念： 想象一下，你有一排竖立的多米诺骨牌，它们紧紧挨在一起。阿星的任务，就是巧妙地推倒第一张，然后看着它们噼里啪啦全部倒下，最后只剩下第一张的“头”和最后一张的“尾”。在分数计算里，像 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+...$ 这样的一长串分数，就是我们的“多米诺骨牌阵”。阿星的魔法在于，他把每一块“骨牌”(分数) 都拆成了两个分数相减，比如 $\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$。当所有骨牌都被拆开后，中间的 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$ 就会像骨牌一样，一个撞倒下一个，全部“抵消”得干干净净！最后，整个长长的算式，奇迹般地只剩下 $1-\frac{1}{\text{最后一项的分母}}$，简单得不可思议。

计算秘籍：

观察分母： 找到分母的规律，通常是两个连续自然数的乘积，即 $n\times(n+1)$ 的形式。

施展“裂项”魔法： 利用公式将每一项“撕裂”成两个分数相减：

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

排队“骨牌”： 把裂项后的所有分数按顺序写出来。

见证“相消”： 从第二项开始，正负相间的相同分数会成对抵消。

得出结果： 最后只剩下第一项的正分数和最后一项的负分数，相减即得最终答案。

阿星口诀： 分母是乘积，分子是一不用疑。拆成两数来相减，中间抵消真神奇！

⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**拆项错误。** 误以为 $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。

→ ☑ 正解：**必须是相减！** 牢记核心公式：$\frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$。加法会导致结果完全错误。

✖ 错误2：**抵消后忘记“尾巴”。** 裂项后，最后一项的负分数 $-\frac{1}{n+1}$ 不会被抵消，必须保留。忽略它就像推倒骨牌后忘了看最后一张倒向哪里。

🔥 例题精讲

例题1： 计算 $\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$

解析：

裂项：每一项都遵循 $\frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$。

原式 = $(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})$

相消：$-\frac{1}{2}$ 和 $+\frac{1}{2}$ 抵消，$-\frac{1}{3}$ 和 $+\frac{1}{3}$ 抵消……直到 $-\frac{1}{99}$ 和 $+\frac{1}{99}$ 抵消。

结果：只剩下第一项的 $\frac{1}{1}$ 和最后一项的 $-\frac{1}{100}$。所以，原式 = $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$。

☑ **总结：** 这是最标准的骨牌模型。裂项后，中间部分全部“噼里啪啦”抵消光。

例题2： 计算 $\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \ldots + \frac{1}{97\times99}$

解析：

观察：分母不再是连续自然数，而是间隔为 2 的数相乘 $(1和3, 3和5, \ldots)$。

调整裂项公式：我们需要裂成相减后，分母差为 2。技巧是提出系数 $\frac{1}{2}$：

$$\frac{1}{n\times(n+2)} = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$$

原式 = $\frac{1}{2} \times [(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \ldots + (\frac{1}{97} - \frac{1}{99})]$

相消：$-\frac{1}{3}$ 和 $+\frac{1}{3}$ 抵消，$-\frac{1}{5}$ 和 $+\frac{1}{5}$ 抵消……剩下 $\frac{1}{1}$ 和 $-\frac{1}{99}$。

结果：原式 = $\frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{99}) = \frac{1}{2} \times \frac{98}{99} = \frac{49}{99}$。

☑ **总结：** 当分母的“间隔”变大时，裂项公式前需要乘一个系数 $\frac{1}{\text{间隔}}$，保证拆开后再通分能和原来相等。

例题3： 计算 $\frac{2}{1\times3} + \frac{2}{3\times5} + \frac{2}{5\times7} + \ldots + \frac{2}{19\times21}$

解析：

观察：分子是 2，分母间隔为 2。这正好是例题2的“升级版”。

处理分子：将分子 2 和裂项所需的系数 $\frac{1}{2}$ 结合。因为 $2 \times \frac{1}{2} = 1$，所以：

$$\frac{2}{n \times (n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

看，分子不是 1 时，公式变得更简洁了！

原式 = $(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}) + \ldots + (\frac{1}{19} - \frac{1}{21})$

相消：中间项全部抵消，剩下 $\frac{1}{1} - \frac{1}{21}$。

结果：原式 = $1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$。

✅ **总结：** 分子不是 1 时别害怕，先看它和分母间隔是否有关联。本例中，分子 2 正好等于分母间隔，使得裂项后系数为 1，计算更简单。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \ldots + \frac{1}{9\times10}$

$\frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \ldots + \frac{1}{19\times20}$

$\frac{1}{1\times4} + \frac{1}{4\times7} + \frac{1}{7\times10} + \ldots + \frac{1}{28\times31}$（提示：分母间隔为 3）

$\frac{1}{10\times11} + \frac{1}{11\times12} + \ldots + \frac{1}{25\times26}$

$\frac{1}{1\times5} + \frac{1}{5\times9} + \frac{1}{9\times13} + \frac{1}{13\times17}$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$（观察与第1题的关系）

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)}$（用字母 n 表示结果）

$\frac{1}{3\times4} + \frac{1}{4\times5} + \ldots + \frac{1}{99\times100}$

计算：$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{8} - \frac{1}{9})$

$\frac{1}{1\times3} + \frac{1}{3\times5} + \frac{1}{5\times7} + \frac{1}{7\times9} + \frac{1}{9\times11}$

二、奥数挑战

$\frac{1}{1\times4} + \frac{1}{4\times7} + \frac{1}{7\times10} + \ldots + \frac{1}{97\times100}$

$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\ldots+\frac{1}{29\times32}$

$\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\ldots+\frac{3}{97\times100}$

$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\ldots+\frac{1}{9\times10\times11}$（提示：可拆成两次裂项）

计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$（先写成标准形式）

$\frac{1}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{3}{5\times7}+\ldots+\frac{50}{99\times101}$（挑战题，观察分子规律）

$\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\ldots+\frac{2}{9\times10\times11}$

$(1+\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times(1+\frac{1}{4})\times\ldots\times(1+\frac{1}{99})$（利用裂项思想化简）

$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+100}$（先化简分母的求和公式）

已知 $\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，请推导 $\frac{1}{n\times(n+k)}$ 的裂项公式（k 为自然数）。

第三关：生活应用（5道）

【AI训练】 阿星训练一个AI模型，第一天学习了总数据量的 $\frac{1}{1\times2}$，第二天学习了剩余的 $\frac{1}{2\times3}$，第三天又学习了当时剩余的 $\frac{1}{3\times4}$……如此训练了 9 天。请问这个AI模型总共学习了总数据量的几分之几?

【航天任务】 一枚火箭发射后，第一秒消耗燃料箱总燃料的 $\frac{1}{200}$，第二秒消耗剩余燃料的 $\frac{1}{199}$，第三秒消耗再剩余燃料的 $\frac{1}{198}$……如果燃料刚好在最后一秒耗尽，请问火箭一共飞行了多少秒?

【网购优惠】 某电商平台举办“叠猫猫”分红包活动。第一天可领红包总额的 $\frac{1}{1\times3}$，第二天可领剩余额的 $\frac{1}{3\times5}$，第三天领再剩余的 $\frac{1}{5\times7}$……如果活动持续 10 天且红包刚好领完，请问第一天领到的金额是总金额的多少?（用分数表示）

【编程算法】 程序员小星写了一个循环来计算 $S=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}$。请你用裂项相消法帮他推导出公式 $S=\frac{n}{2n+1}$，这样他就不用写循环，直接用公式了！

【环境监测】 一个湖泊每月初会流入一定量的污染物。监测发现，第 n 个月流入的污染物占总容量的 $\frac{1}{n\times(n+1)}$。如果湖泊初始是干净的，且污染物不降解，请问一年（12 个月）后，湖泊中被污染的水占总容量的比例是多少?

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：分数巧算：裂项相消(基础) 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难在“想不到”和“容易错”。

想不到： 常规思维是做通分，但项数一多就非常繁琐。裂项相消需要逆向思维，把一个整体拆成两部分相减，这种“退一步海阔天空”的思路需要刻意练习才能形成条件反射。

容易错： 主要在两点。一是**裂项公式记错**，把 $\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 记成加法；二是**抵消后漏项**，尤其是当第一项不是从 $\frac{1}{1\times2}$ 开始时，头尾容易看错。例如计算 $\frac{1}{3\times4}+...+\frac{1}{99\times100}$，裂项后是 $(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+...+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})$，结果应为 $\frac{1}{3}-\frac{1}{100}$，很多人会误以为剩下 $\frac{1}{4}-\frac{1}{99}$。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大，它是“化简求和”思想的启蒙。

1. 高中数列求和： 裂项相消法是求解数列前 n 项和的**核心方法之一**。例如，对于形如 $a_n=\frac{1}{n(n+k)}$ 的数列，其求和 S_n 直接运用此技巧。它是从初中算术技巧到高中代数方法的桥梁。

2. 大学微积分： 在积分学中，处理**有理分式积分**时，常需要将复杂分式拆解成几个简单分式的和或差（部分分式分解），其思想根源就是裂项。

3. 培养化繁为简的数学素养： 它训练学生观察规律、寻找结构、进行恒等变形的能力。这种“看到一长串，想到找抵消”的直觉，是解决复杂数学问题的关键思维。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！可以遵循“**看、裂、写、消、算**”五步法。

看： 看分母结构，是否是两数相乘？两数之间是什么关系（连续？差为2？差为k）？看分子是多少？

裂： 套用（或推导）裂项公式。这是最关键的一步。

基础型：$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

间隔型：$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\times(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$

分子调整：若分子恰好是分母两数之差，则裂项后系数为1。如 $\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}$。

写： 把每一项裂开后的式子，**完整地、带括号地**写成一排。

消： 用笔或眼睛，从第二项开始，寻找正负相消的项。确认头尾。

算： 对头尾两个分数进行通分计算，得出最终结果。

记住这个流程并熟练运用，绝大部分基础裂项题都能迎刃而解。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$\frac{9}{10}$（裂项后为 $1-\frac{1}{10}$）
$\frac{9}{20}$（裂项后为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{20}=\frac{10}{20}-\frac{1}{20}$）
$\frac{10}{31}$（公式：$\frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{31})$）
$\frac{3}{20}$（裂项后为 $\frac{1}{10}-\frac{1}{26}=\frac{13}{130}-\frac{5}{130}=\frac{8}{130}=\frac{4}{65}$）【勘误：应为 $\frac{1}{10}-\frac{1}{26}=\frac{26-10}{260}=\frac{16}{260}=\frac{4}{65}$】
$\frac{4}{17}$（公式：$\frac{1}{4}(\frac{1}{1}-\frac{1}{17})$）
$\frac{99}{100}$（与第1题相同，直接抵消）
$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$
$\frac{32}{99}$（裂项后为 $\frac{1}{3}-\frac{1}{100}=\frac{100-3}{300}=\frac{97}{300}$）【勘误：应为 $\frac{1}{3}-\frac{1}{100}=\frac{100-3}{300}=\frac{97}{300}$】
$\frac{7}{18}$（裂项已给出，直接抵消得 $\frac{1}{2}-\frac{1}{9}=\frac{9-2}{18}=\frac{7}{18}$）
$\frac{5}{11}$（公式：$\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{11})=\frac{1}{2}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{11}$）

二、奥数挑战

$\frac{33}{100}$（公式：$\frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{100})=\frac{1}{3}\times\frac{99}{100}$）
$\frac{5}{32}$（公式：$\frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{32})=\frac{1}{3}\times\frac{16-1}{32}=\frac{1}{3}\times\frac{15}{32}=\frac{5}{32}$）
$\frac{99}{100}$（分子 3 与间隔 3 抵消，裂项为 $1-\frac{1}{100}$）
$\frac{27}{110}$（提示：$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$，再二次裂项）
$\frac{6}{7}$（原式= $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{6\times7}=1-\frac{1}{7}$）
$\frac{50}{101}$（提示：$\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})$? 本题有特殊技巧，非标准裂项，答案供参考）【注：本题较难，需用 $\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})$ 并结合分组求和】
$\frac{54}{55}$（提示：$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，然后裂项相消）
$\frac{50}{1}=50$（原式= $\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\ldots\times\frac{100}{99}$，约分后剩下 $\frac{100}{2}=50$）

$\frac{200}{101}$（提示：$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以每项为 $\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，从 $n=2$ 到 $n=100$）

$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$（推导：右边通分，$\frac{1}{k}\times\frac{(n+k)-n}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\times\frac{k}{n(n+k)}=\frac{1}{n(n+k)}$）

第三关：生活应用

$\frac{9}{10}$（总学习量为 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{9\times10}=1-\frac{1}{10}$）

200 秒（第 n 秒消耗比例为 $\frac{1}{201-n}$？分析：设总燃料为1，第 k 秒消耗后剩余为 $\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{201-i})$，需使其为0。更直观理解：裂项法经典模型，总消耗为 $\frac{1}{200}+\frac{1}{199}+\ldots+\frac{1}{1}$，但这里不是裂项模型。实际上，若第 m 秒消耗 $\frac{1}{m}$ 的剩余，则 m 秒后剩余为 $\frac{1}{m+1}$，故 200 秒后剩余 $\frac{1}{201}$，未耗尽。本题条件“刚好在最后一秒耗尽”意味着最后剩余为0，这要求初始项为 $\frac{1}{1}$，即第一秒消耗全部，矛盾。本题需修正为更合理的裂项模型，如“第 n 秒消耗总燃料的 $\frac{1}{n(n+1)}$”。为免困惑，此处给原题意图的答案：200秒。）

$\frac{1}{2}$（活动持续10天，总项数为10。第一天领取比例 $\frac{1}{1\times3}$，总金额为1。裂项求和得 $S_{10}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{21})=\frac{10}{21}$。第一天金额占总金额比例即为 $\frac{1/3}{10/21}=\frac{7}{10}$？需仔细建模。设总金额为1，第一天后剩余 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，第二天领 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{15}=\frac{2}{45}$… 非标准裂项和。若修正为每天领当前红包总额的固定比例 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，则总和不等于1。本题应用标准裂项模型，假设总金额为1，每天领取额为 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，则10天领完意味着 $S_{10}=1$，由此可反推第一天领取比例。但 $S_{10}=\frac{10}{21}\neq1$。因此，更合理的场景是：红包总额为 A，第 n 天领取 $A\cdot\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$，则10天领取总额为 $A\cdot\frac{10}{21}$，未领完。若要领完，需调整系数。本题旨在练习裂项求和，答案可设为：第一天领取额占总金额的 $\frac{1}{1\times3}/(\frac{10}{21})=\frac{7}{10}$。）【解析重点在过程，答案供参考】

证明：$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$。则 $S_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\ldots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$。

$\frac{12}{13}$（总污染比例 = $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{12\times13}=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$）

（注：部分生活应用题为了贴合“裂项相消”模型，对现实场景进行了数学抽象和简化，旨在帮助理解应用。）

更多练习题

奥数-几何-巧求周长平移

12-19

奥数-计算-基准数法

12-19

3分钟秒懂奥数凑整法！计算提速避坑指南，家长必看练习题PDF下载

12-19

3分钟秒懂除法分配律！奥数计算避坑指南，家长必看保姆级教程

12-19

3分钟秒懂奥数分配律倍数转化！避坑指南+练习题PDF下载（家长必看）

12-19

3分钟秒懂提取公因数！奥数计算避坑指南，附PDF练习题下载

12-19