

奥数-计算-分数整体约分

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：分数巧算：整体约分 原理

核心概念：同学们，想象一下，你面前有一长串分数的乘法，像一列长长的、色彩斑斓的“消消乐”方块。你是不是想一个一个硬算？那可就累坏了！阿星教你一招：**斜着看**！你把所有分数的分子都连成一条斜线，所有分母也连成一条斜线，就像在玩连线游戏。这时，你仔细找找，有没有分子和分母是“同款方块”（相同的数或式子）？找到后，就勇敢地把它们“对消”掉！这个神奇的操作，就叫“整体约分”。它的本质，是把所有分子和所有分母都分别乘起来，形成一个巨大的分数，然后在这个“大局”里找朋友，成对消除，让计算瞬间变清爽。

计算秘籍：

列阵：把题目抄写清楚，把所有的乘号“ \times ”都看作分数线。

展开：心里或草稿上，把所有分子写在一起，所有分母写在一起，形成一个“总分数”：

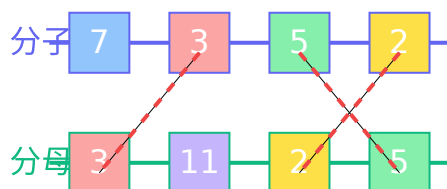
所有分子的乘积
所有分母的乘积。

连线：阿星喊出：“斜着看！消消乐开始！”在这个“总分数”中，寻找分子和分母中完全相同的因数（“同款方块”）。

消除：将它们成对划掉（约分），直到没有可以配对的为止。

收尾：计算剩下“方块”的乘积，得出最简结果。

阿星口诀：长长一串像火车，斜线拉齐找朋友，你消我消全不见，答案清爽又简单！



⚠ 易错警示：避坑指南

✗ **错误1：** 没有把算式完整地展开成“总分数”形式，就开始局部乱约，导致漏掉能约的“方块”。

✓ **正解：** 务必先执行“阿星秘籍”第二步，在草稿上写出 $\frac{\text{全部分子乘起来}}{\text{全部分母乘起来}}$ ，在这个大局里进行扫描和配对。

✗ **错误2：** 约分后，忘记“1”还在。当一个数被完全约掉后，记得它变成了 1，而不是消失了，因为任何数乘以 1 都等于它本身。

✓ **正解：** 约分时，将配对的两个数同时划去，心里要清楚它们都变成了 1。最后计算时，分子或分母上“空空如也”的部分，就是 1。

🔥 例题精讲

例题1： 计算 $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{10}{4} \times \frac{9}{8}$

🔗 **解析：**

列阵展开： 写出总分数： $\frac{2 \times 6 \times 10 \times 9}{3 \times 5 \times 4 \times 8}$

斜线扫描（消消乐）：

分子 2 和分母 4 可约： $2 = 2, 4 = 2 \times 2$ ，约掉一个 2。

分子 6 和分母 3 可约： $6 = 2 \times 3, 3 = 3$ ，约掉 3，6 剩下 2。

分子 10 和分母 5 可约：约掉 5，10 剩下 2。

分子 9 和分母没有直接相同的，但 $9 = 3 \times 3$ ，暂时留一下。

计算剩余： 约分后，分子剩下： $2_{(\text{来自}6)} \times 2_{(\text{来自}10)} \times 9 = 2 \times 2 \times 9 = 36$ 。分母剩下： $2_{(\text{来自}4\text{剩下的})} \times 8 = 16$ 。

最终化简： $\frac{36}{16} = \frac{9}{4}$ 。

✓ **总结：** 先写成完整乘积形式，再玩“消消乐”，清晰不遗漏。

例题2： 计算 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times \frac{12}{5} \times \frac{15}{7} \times \frac{14}{9}$

🔗 **解析：**

处理括号： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ 。原式变为 $\frac{5}{6} \times \frac{12}{5} \times \frac{15}{7} \times \frac{14}{9}$ 。

列阵展开： 总分数： $\frac{5 \times 12 \times 15 \times 14}{6 \times 5 \times 7 \times 9}$

斜线扫描（消消乐）：

首位的分子 5 和分母 5 对消。

分子 12 和分母 6 可约：约掉 6，12 剩下 2。

分子 15 和分母 9 有公因数 3： $15 = 3 \times 5$ ， $9 = 3 \times 3$ ，约掉一个 3，15 剩下 5，9 剩下 3。

分子 14 和分母 7 可约：约掉 7，14 剩下 2。

计算剩余： 分子： $2_{(\text{来自}12)} \times 5_{(\text{来自}15\text{剩下的})} \times 2_{(\text{来自}14)} = 20$ 。分母： $3_{(\text{来自}9\text{剩下的})}$ 。

最终结果： $\frac{20}{3}$ 。

☒ **总结：** 遇混合运算，先处理括号。约分时，不仅看整数，也要看分解后的质因数。

例题3： 计算 $\frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{7 \times 11} \times \frac{14}{3^2 \times 5} \times \frac{33}{20}$

 **解析：**

列阵展开： 总分数： $\frac{(2^2 \times 3 \times 5^2) \times 14 \times 33}{(7 \times 11) \times (3^2 \times 5) \times 20}$

拆解数字，统一方块： 把 14, 33, 20 都分解质因数。

$$14 = 2 \times 7$$

$$33 = 3 \times 11$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$\text{总分数变为: } \frac{2^2 \times 3 \times 5^2 \times (2 \times 7) \times (3 \times 11)}{7 \times 11 \times 3^2 \times 5 \times (2^2 \times 5)}$$

斜线扫描（超级消消乐）：

分子有 $2^2 \times 2 = 2^3$ ，分母有 2^2 ，约掉 2^2 ，分子剩下一个 2。

分子有 $3 \times 3 = 3^2$ ，分母有 3^2 ，全部对消。

分子有 5^2 ，分母有 $5 \times 5 = 5^2$ ，全部对消。

分子有 7，分母有 7，对消。

分子有 11，分母有 11，对消。

计算剩余： 经过这场“大消除”，分子只剩下 2，分母空空如也，即为 1。

最终结果： $\frac{2}{1} = 2$ 。

☑ **总结：**当数字较大或较复杂时，把它们都分解成“质因数方块”来玩消消乐，是最高效、最准确的方法！

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{12}{25} \times \frac{10}{9}$$

$$\frac{7}{10} \times \frac{20}{21} \times \frac{9}{14}$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{10}{11} \times \frac{33}{8}$$

$$\frac{9}{14} \times \frac{28}{27} \times \frac{3}{2}$$

$$\frac{4}{15} \times \frac{25}{16} \times \frac{12}{5}$$

$$\frac{11}{18} \times \frac{6}{55} \times \frac{15}{22}$$

$$\frac{13}{20} \times \frac{25}{39} \times \frac{12}{5}$$

$$\frac{16}{21} \times \frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{24}{35} \times \frac{5}{12} \times \frac{14}{9}$$

二、奥数挑战

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \quad (\text{提示：连环消消乐})$$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} \quad (\text{提示：先化成乘法相关形式})$$

$$(1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) \times \dots \times (1 - \frac{1}{10})$$

$$\frac{2^2}{1 \times 3} \times \frac{3^2}{2 \times 4} \times \frac{4^2}{3 \times 5} \times \frac{5^2}{4 \times 6}$$

$$\frac{101+103+105}{103+105+107} \quad (\text{提示：观察分子分母共同部分})$$

$$\text{计算：} \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{99}{100} \text{ 与 } \frac{1}{10} \text{ 的大小关系。}$$

$$\frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \frac{1}{11 \times 14} + \frac{1}{14 \times 17}$$

$(1 + \frac{1}{2}) \times (1 + \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{1}{6}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5}) \times (1 - \frac{1}{7})$

$\frac{1993 \times 1994 - 1}{1993 + 1992 \times 1994}$ （提示：将分子分母变形，寻找可约部分）

已知 $a = \frac{1001}{1000}, b = \frac{1002}{1001}, c = \frac{1003}{1002}$ ，比较 $a \times b \times c$ 与 1 的大小。

第三关：生活应用（5道）

【AI训练】一个深度学习模型，处理一张图片需要 $\frac{3}{8}$ 秒。现在有一个优化算法包，能将效率依次提升为原来的 $\frac{4}{3}$ 倍、 $\frac{9}{8}$ 倍和 $\frac{16}{15}$ 倍。连续使用这三个优化包后，处理一张图片需要多少秒？

【航天工程】火箭某一级推进剂的燃料和氧化剂需要按 $\frac{5}{9}$ 的质量比混合。调配师第一次取了 $\frac{3}{10}$ 吨燃料，第二次取了 $\frac{6}{7}$ 吨燃料，对应的氧化剂需要按比例添加。若将两次调配好的混合液合并在一个大罐里，最终混合液中燃料占总质量的几分之几？

【网购折扣】一件商品原价300元，“双十一”活动连环折扣：先全场 $\frac{9}{10}$ ，再使用店铺券 $\frac{14}{15}$ ，最后叠加平台补贴 $\frac{19}{20}$ 。小明最终应付多少钱？（结果保留整数）

【数据压缩】阿星发明了一种“分数压缩编码”，一段信息被编码为： $\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{100}{99} \times \frac{99}{98}$ 。请问这段编码解码后的简单分数形式是什么？

【光波频率】在光纤通信中，三种不同频率的光波 f_A, f_B, f_C 满足关系： $f_A = \frac{2}{3}f_B, f_B = \frac{5}{4}f_C$ 。如果用于合成的基准频率 f_C 是 $\frac{12}{5}$ 太赫兹，那么 f_A 是多少太赫兹？

🧠 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：分数巧算：整体约分 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点在于思维模式的转换。同学们习惯了逐个分数依次乘除、逐次约分的“线性思维”。而整体约分要求大家“跳出来”，以俯瞰的视角，把所有运算看作一个整体 $\frac{A}{B}$ ，并在此框架下进行全局性的因子配对。这从“sequential processing”（顺序处理）到“parallel processing”（并行处理）的思维跃迁，需要刻意练习才能熟练掌握。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大，它是代数思维的基石。

代数化简： 将来遇到 $\frac{x^2y}{z} \cdot \frac{z^2}{xy^2}$ 这类式子，整体约分的思维完全适用，只是“方块”从数字变成了字母。

概率计算： 复杂事件的概率常常是多个概率的乘积，整体约分能简化计算。

数列求和（裂项相消）： 例如 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ，其原理与“寻找可约部分”的思想同源。整体约分训练了你发现结构中“对称”或“可抵消”部分的眼睛。

可以说，它训练的是在复杂表达式中寻找简洁数学结构的核心能力。

问：有什么一招必杀的解题“套路”吗？

答：有！严格遵循以下两步，可破解绝大多数题目：

无脑展开： 不论题目长什么样，第一步永远是在草稿纸上写下： $\frac{\text{所有分子因子乘起来}}{\text{所有分母因子乘起来}}$ 。如果是带加减的括号，先算出来。

质因数消消乐： 将上一步中得到的所有数字（特别是合数）**分解质因数**。然后，在分子和分母的质因数堆里，尽情地玩连线消除游戏。

这个套路的公式化表达就是：对于 $\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$ ，其值等于 $\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^n b_i}$ 经质因数约分后的最简形式。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{3 \times 8 \times 15}{4 \times 9 \times 16} = \frac{3 \times (2^3) \times (3 \times 5)}{(2^2) \times (3^2) \times (2^4)} = \frac{5}{2 \times 3 \times 2} = \frac{5}{12}$$

$\frac{5}{12}$ （过程略，下同）

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$1$$

$$1$$

$$\frac{1}{22}$$

$$1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{9}$$

二、奥数挑战

$\frac{1}{10}$ (分子分母从 2 到 9 全部连环约掉)

$\frac{4}{5}$ (提示: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 裂项后相加, 中间项全消)

$\frac{1}{10}$ $((1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n}$, 然后如第1题连环约分)

$\frac{5}{3}$ (写出几项后发现, 分子分母隔项可约)

$\frac{103}{105}$ (令 $S = 103 + 105$, 则分子为 $101 + S$, 分母为 $S + 107$, 并非整体约分, 但考察整体观察能力)

原式 $< \frac{1}{10}$ (与前一项比较, 每一项都小于1, 且乘得多越来越小)

$\frac{4}{85}$ (裂项: $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2})$)

1 (将加法的写成分数, 如 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, 然后整体相乘, 几乎所有数都成对消掉)

1 (分子: $1993 \times 1994 - 1 = 1993 \times (1993 + 1) - 1 = 1993^2 + 1993 - 1$; 分母: $1993 + 1992 \times 1994 = 1993 + (1993 - 1) \times (1993 + 1) = 1993 + 1993^2 - 1$ 。分子分母完全相同。)

$a \times b \times c = \frac{1001}{1000} \times \frac{1002}{1001} \times \frac{1003}{1002} = \frac{1003}{1000} > 1$

第三关: 生活应用

$\frac{3}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = \frac{3 \times 3 \times 15}{4 \times 9 \times 16} = \frac{15}{64}$ (秒) 【注意: 效率提升为原来的 $\frac{4}{3}$ 倍, 则时间变为原来的 $\frac{3}{4}$ 】

设每次加入氧化剂质量为 x, y 吨。由比例 $\frac{\text{燃料}}{\text{氧化剂}} = \frac{5}{9}$ 得: $x = \frac{3}{10} \times \frac{9}{5} = \frac{27}{50}$, $y = \frac{6}{7} \times \frac{9}{5} = \frac{54}{35}$

。最终燃料总质量: $\frac{3}{10} + \frac{6}{7} = \frac{81}{70}$, 氧化剂总质量: $\frac{27}{50} + \frac{54}{35} = \frac{729}{350}$ 。燃料占比:

$\frac{\frac{81}{70}}{(\frac{81}{70}) + (\frac{729}{350})} = \frac{\frac{81}{70}}{(\frac{81}{70}) + (\frac{1458}{700})} = \frac{\frac{810}{700}}{(\frac{810}{700}) + (\frac{1458}{700})} = \frac{810}{2268} = \frac{5}{14}$ 。

$300 \times \frac{9}{10} \times \frac{14}{15} \times \frac{19}{20} = \frac{300 \times 9 \times 14 \times 19}{10 \times 15 \times 20} = \frac{30 \times 9 \times 14 \times 19}{15 \times 20} = \frac{2 \times 9 \times 14 \times 19}{20} = \frac{9 \times 14 \times 19}{10} = \frac{2394}{10} = 239.4 \approx 239$

(元)。

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{5}{4} \times \frac{8}{7} \times \frac{7}{6} \times \dots \times \frac{100}{99} \times \frac{99}{98} = \frac{2}{98} = \frac{1}{49}$ (从第二项开始, 分子与后一项的分母连续对消, 最后剩下第一项的分子 2 和最后一项的分母 98)。

$f_A = \frac{2}{3} f_B = \frac{2}{3} \times (\frac{5}{4} f_C) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{12}{5} = \frac{2 \times 5 \times 12}{3 \times 4 \times 5} = 2$ (太赫兹)。

更多精彩内容请访问 星火网 www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-计算-分数裂项进阶

12-19

奥数-计算-分数裂项基础

12-19

奥数-几何-巧求周长平移

12-19

奥数-计算-基准数法

12-19

3分钟秒懂奥数凑整法！计算提速避坑指南，家长必看练习题PDF下载

12-19

3分钟秒懂除法分配律！奥数计算避坑指南，家长必看保姆级教程

12-19

