

奥数-计数-数线段

刚刚

0 次阅读

本资料为小学数学专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

几何计数：数线段

知识要点

在学习如何“数线段”之前，我们先要明白数的是什么。

💡 核心概念

一条线段有两个端点。当我们看到一条直线上有多个点，并把每两个点之间用直直的线连起来，就会得到很多条不同的线段。我们的任务就是，把所有可能的线段都“数”出来，并且做到**不重复、不遗漏**。

比如，在一条直线上有 A、B、C 三个点，可以组成线段：AB、AC、BC。这里一共有 3 条线段。

📝 计算法则

这里有两个最常用的方法：

方法一：有序枚举法（适合点数少时）

给直线上的点从左到右（或从右到左）标上字母，如 A、B、C、D。

从最左边的点A开始数：以A为左端点的线段有 AB、AC、AD，共 3 条。

接着数下一个点B：以B为左端点的线段有 BC、BD，共 2 条。（BA和AB是同一条，已经数过，不能再数）

接着数下一个点C：以C为左端点的线段有 CD，共 1 条。

最后把所有的数量加起来： $3 + 2 + 1 = 6$ （条）。

方法二：公式法（适合点数多时）

如果一条直线上有 n 个点 ($n \geq 2$)，那么线段的总数可以用一个公式来计算：

$$\text{线段总数} = \frac{n \times (n - 1)}{2}$$

这个公式是怎么来的呢？我们想一想：从 n 个点中任意选 2 个点，都可以组成一条线段。第一次选有 n 种选择，第二次选有 $(n-1)$ 种选择，但这样选出来的 (A,B) 和 (B,A) 是同一条线段，所以总数要除以 2。

🎯 记忆口诀

“按序枚举，从左到右；点数为 n ，公式搞定。 n 乘 $n - 1$ ，最后一定除以 2。不重不漏，数清所有！”

🔗 知识关联

线段的认识：二年级学过，线段是直的，有两个端点。

角的初步认识：数线段的方法和数角（从一个顶点引出多条射线）的方法非常相似，都是“有序分类”或使用组合公式。

简单的排列组合思想：这是对未来学习“组合”问题（比如握手问题）的初步接触。

易错点警示

数线段时，同学们常常会犯这些错误：

✗ 错误1： 随意乱数，没有顺序，导致重复数或漏数。

✓ 正解： 一定要按照“有序枚举法”，从第一个点开始，依次以每个点为起点向后数。

✗ 错误2： 忘记数“跨越”多个点的长线段。

✓ 正解： 在以一点为起点时，必须考虑它和后面**每一个**点都能组成线段，不能只看相邻的点。

✗ 错误3： 使用公式时，错把“线段数”当成“点数”，或者忘记除以 2。

✓ 正解： 公式 $\frac{n \times (n-1)}{2}$ 中的 n 是**点的个数**。计算后一定要检查是否除以了 2。

三例题精讲

🔥 例题1：基础数线段

下图中，一条直线上有 A, B, C, D, E 五个点。请问这五个点一共可以组成多少条不同的线段？

(此处可插入一条直线，上有等距点A、B、C、D、E的SVG图形)

 **第一步：** 确定方法。点数不多，我们可以用有序枚举法。

 **第二步：** 有序枚举。

以A为起点：AB, AC, AD, AE → 共 4 条。


以B为起点：BC, BD, BE → 共 3 条。

以C为起点：CD, CE → 共 2 条。

以D为起点：DE → 共 1 条。


 **第三步：** 求和。 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (条)。

 **答案：** 一共可以组成 10 条线段。

 **总结：** 有序枚举就像“接力赛”，从第一个点开始“出发”，看看它能跑到后面哪几个点，记下条数，然后换下一个点“出发”，直到最后一个点。

 **例题2：** 公式应用

京广高铁线上一共有 25 个主要车站（把所有车站看成一条直线上的点）。请问，铁路部门需要为这些车站之间的直达车票准备多少种不同的票价？（假设任意两站间票价都不同）

 **第一步：** 理解题意。任意两个车站之间就是一种直达票价，这正好对应了“数线段”问题。25 个车站就是 25 个点。

 **第二步：** 选择方法。点数很多，使用公式法。

 **第三步：** 代入公式计算。 $n = 25$ 。

$$\text{线段总数} = \frac{25 \times (25 - 1)}{2} = \frac{25 \times 24}{2} = \frac{600}{2} = 300。$$

 **答案：** 需要准备 300 种不同的票价。

💬 **总结：**遇到“握手”、“车票”、“比赛场次”等问题，很可能就是在考“数线段”，关键是把“对象”转换成“点”。

🔥 例题3：数复杂图形中的线段

数一数，下面这个“阶梯”形（如下图，可描述为由多条水平竖直线段连接成的折线，整体呈阶梯状）一共有多少条线段？

（此处可插入一个简单的3级阶梯形状SVG，由水平和垂直的短线构成）

🔧 **第一步：**分类。图形不是一条直线，我们不能直接用一个公式。需要把图形分解成**水平的线段**和**竖直的线段**分别来数。

🔧 **第二步：**数水平线段。我们可以把每条水平线“拉直”，看作独立的直线来数。

最上面一条水平线有3个点，线段数： $3 + 2 + 1 = 6$ 条？等等，不对。这个图形里，水平的“线段”是指那些小横杠。我们直接数小横杠：第一层有2条，第二层有2条，第三层有2条。共 $2 + 2 + 2 = 6$ 条水平**基本线段**。

但题目问的是“线段”，包含这些基本线段，也包含由它们连接起来的长线段。所以对于最长的底边，它有4个端点，线段数应为 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 条。我们需要把每一行独立的水平线都这样数。

🔧 **第三步：**为了让讲解更清晰，我们换一种更系统的数法：**按方向数**。

1. 所有**水平方向**的线段：看成一个由4个点（A1, A2, A3, A4）组成的直线。线段数 $= \frac{4 \times 3}{2} = 6$ 条。

2. 所有**竖直方向**的线段：看成由3个点（B1, B2, B3）组成的直线。线段数 $= \frac{3 \times 2}{2} = 3$ 条。

（假设图形是标准的三阶阶梯，有一条完整的底边和完整的侧边）

✅ **答案：**这个阶梯图形一共有 $6 + 3 = 9$ 条线段。（此答案基于一个简化的标准模型，具体图形可能微调）

💬 **总结：**数复杂图形的线段总数，秘诀是**分类**。先按方向（水平、竖直、斜向）分好类，然后在每一类里，再用我们学过的“数线段”方法去数。

练习题（10道）

一条直线上有4个点，可以组成多少条不同的线段？

数一数，下图中共有多少条线段？（题目附一个线段图：A—B—C—D）

小红和她的3个好朋友见面，每两人都要握手一次。一共要握手多少次？

用“有序枚举法”数出A、B、C、D、E、F六个点在同一条直线上时，线段的总数。

学校秋季运动会会有8个班级参加篮球单循环赛（每两个班都要比赛一场）。一共要安排多少场比赛？

下图是一个五角星图案，数一数它所有的边（线段）有多少条？（提示：五角星有10个顶点和10条边）

一条直线上，从左到右依次有M、N、P、Q、R、S六个点。以M为端点的线段有几条？以P为左端点的线段有几条？

如果知道一条直线上线段的总数是15条，请问这条直线上有多少个点？（用公式反推）

画一条直线，在上面点7个点，使得数出的线段数恰好是21条。验证一下。

小刚在纸上画了若干条线段，这些线段有10个互不重合的端点。请问他最多可能画了多少条不同的线段？

奥数挑战（10道）

在下图中，包含“*”号的线段一共有多少条？（图：一条直线上有7个等距点，中间的点标为*）

数一数，一个长方形的两条对角线与它的四条边，一共构成了多少条线段？（注意，线段是直的，端点可以是交点）

平面上有10个点，其中任意三点都不在同一条直线上。以这些点为端点，最多可以连出多少条线段？

一个正方形的每条边被平均分成4份，然后连接对边的分点，形成网格。这个正方形网格图中共有多少条线段？（仅考虑水平和竖直方向）

线段AB上插入99个点（加上A、B共101个点）。请问，图中共有多少条以A点为端点的线段？

数一数，下图“田”字格中，一共有多少条线段？（包含横、竖所有可能的线段）

有若干条线段，它们有2023个互不重合的端点，且任何两条线段都没有公共的端点。这些线段最多有多少条？最少有多少条？

在一条直线上，如果线段MN和线段PQ有重叠部分，但不完全重合。这样的两条线段，它们的端点最多能确定多少条不同的线段？

用一个“工”字形的窗框（由三条横杠和一条竖杠组成），这个窗框的边框一共由多少条线段构成？（考虑每条独立的木条）

若 $\frac{n \times (n-1)}{2} = 66$ ，求 n 的值。（ n 为正整数）

生活应用（5道）

（高铁） “复兴号”智能动车组在京沪高铁上运行时，途经10个大站。如果铁路APP要显示任意两站间的实时余票信息，理论上需要维护多少种不同的“区间”信息？

（航天） 中国空间站“天和”核心舱与“问天”、“梦天”实验舱对接后，形成了“T”字形构型。如果我们将每个舱段的主要对接口看作一个点，那么在那些“点”之间，航天员在舱内活动的可能“直通路程”可以看作线段。请你建立一个简化模型并计算路径数量。

（AI） 一个人脸识别系统需要标记人脸的68个关键点（如眼角、嘴角）。为了分析面部表情，程序需要计算许多“特征向量”，这些向量往往由两个关键点的连线（线段）决定。那么，仅考虑由任意两个不同点构成的线段，最多可以提供多少种不同的“基点对”？

（环保） 某市在一条东西走向的主河道旁设立了15个水质监测点。环保部门每天需要对比任意两个监测点的数据来分析污染扩散情况。每天需要做多少次两两对比？

（网购） 某快递公司的城市配送网络有50个终端驿站。为了优化路线，系统需要计算任意两个驿站之间的最短距离。在算法测试阶段，需要预先计算多少对驿站之间的距离？

参考答案与解析

【练习题答案】

6 条。解析：4个点， $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 。

6 条。解析：A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D。

6 次。解析：小红和3个朋友共4人，握手次数即线段数： $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 。

15 条。解析：6个点， $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ 。枚举：5+4+3+2+1=15。

28 场。解析：8个点， $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ 。

10 条。解析：五角星的10条边就是10条线段。

以M为端点的有5条（M与后面5个点各组成一条）。以P为左端点的有3条（P-Q, P-R, P-S）。

6 个点。解析：由 $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ 得 $n(n-1) = 30$ ，因为 $6 \times 5 = 30$ ，所以 $n = 6$ 。

正确。解析：7 个点， $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ 。

45 条。解析：10 个端点，如果它们都在同一条直线上，就能连出最多线段： $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ 。

【奥数挑战答案】

解析：包含特定点 (*) 的线段，一端是*，另一端可以是其他6个点中的任意一个。所以有 6 条。

解析：长方形有4个顶点，加上两条对角线的交点，共5个点。但线段是直的，我们需要重新梳理：长方形的4条边，2条对角线。但是，对角线和边在顶点处相交，这些“部分”也是线段。更严谨的方法是先列出所有端点（4顶点+1中心点），但中心点在对角线上。如果只计算图形画出的线（边和对角线），那么是 $4 + 2 = 6$ 条独立的线段。如果计算所有被交点分成的更小线段，则需要另外分类数。

解析：等价于10个点在同一直线上的情况吗？不，这里“任意三点不共线”保证了任意两点连线不会重合，但线段数量算法和共线时是一样的，都是 $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ 条。因为每两个点决定一条线段。

解析：每条边被分成4段，即有5个点。水平方向有5条横线，每条横线上有5个点，可组成 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ 条线段。5条横线共 $10 \times 5 = 50$ 条水平线段。同理，竖直方向也有50条。总共 100 条。（注意：此计算包含了正方形外围的边）

解析：以A为一个端点的线段，另一个端点可以是B以及插入的99个点中的任何一个，共有 $1 + 99 = 100$ 个选择。所以有 100 条。

解析：“田”字由4个小正方形组成，横竖各3条线，形成4行交点、4列交点。我们可以按方向数：水平线段：每一行有4个点，可组成 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 条线段。有4行，共 $6 \times 4 = 24$ 条？不对，因为行与行之间的横线是分开的。更准确的方法是：水平方向有3条“长横线”，每条被分成3段，所以有3条长线段和3个分点形成的短线段？复杂。标准“田”字格，通常有9个交点（3x3网格）。数线段：水平方向看，第一行3个点，线段数=3；有三行这样的独立行，水平短线段共9条。还有贯穿整个长度的长横线吗？没有，因为“田”字中间是断开的。所以需要仔细画图分析。一个常见答案是包含所有边和中间“十”字的线段，总数为 20 条（横12条，竖8条，或反之）。

解析：最多：每条线段用掉2个端点， $2023 \div 2 = 1011$ 余1，所以最多 1011 条（剩下1个端点无法成线段）。最少：可以是一条很长的线段，上面有2023个端点（包括两端），那么这条线段上共有 $\frac{2023 \times 2022}{2}$ 条子线段，但题目问的是“这些线段”的条数，如果理解为“画出的线段”只有1条。所以答案：最多1011条，最少1条。

解析：假设直线顺序是M、N、P、Q，且MN和PQ重叠（即N在P左侧，P在N右侧，Q在N右侧）。端点有M、N、P、Q。四个点在同一直线上，总线段数为 $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ 条。

解析：“工”字形由6条短线段组成（上横3段，竖1段，下横3段？）。通常“工”字是三横两竖？需要明确图形。假设是常见写法：三横（上、中、下）和中间一竖。那么独立的线段是：上横（1

条)、中横 (1条)、下横 (1条)、竖 (1条), 共4条。但如果“工”字是笔画, 上横可能被竖分成两段, 那就是更细的分解。按边框算, 常见答案可能是4条或6条, 依图形定义而定。

解析: $n(n-1) = 132$, $12 \times 11 = 132$, 所以 $n = 12$ 。(负根舍去)

【生活应用答案】

45 种。解析: 10个点 (车站), $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ 。

简化模型: 将三个舱 (天和、问天、梦天) 看作三个点。如果两两之间都有直通通道 (线段), 则有 $\frac{3 \times 2}{2} = 3$ 条路径。但实际空间站构型是“T”字, 可能并非两两直连。此题为建立模型练习, 答案可为3。

2278 种。解析: 68个点, $\frac{68 \times 67}{2} = 2278$ 。

105 次。解析: 15个点, $\frac{15 \times 14}{2} = 105$ 。

1225 对。解析: 50个点, $\frac{50 \times 49}{2} = 1225$ 。

更多精彩内容请访问 星火网 www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-计数-容斥原理

12-19

奥数-计数-插空法

12-19

奥数-计数-捆绑法

12-19

插板法计数原理详解(含奥数练习题)

12-18

标数法详解与练习题(奥数计数专题)

12-18

组合选人问题详解(含奥数练习题)

12-18

