奥数-数论-完全平方数尾数

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

完全平方数的尾数特征

知识要点

核心概念：

完全平方数，就是一个整数乘以自己得到的数。比如 $1 \times 1 = 1$，$2 \times 2 = 4$，那么1和4就是完全平方数。

尾数，就是指一个数的个位数字。完全平方数的尾数有非常神奇的规律：无论这个整数有多大，它的平方数的个位数字，只能是 **0, 1, 4, 5, 6, 9** 这六个数字中的一个，绝对不可能出现 2, 3, 7, 8。

计算法则：

列出0到9这十个数字的平方：$0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$。

只看这些结果的个位数：0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1。

去重后得到：0, 1, 4, 5, 6, 9。这就是所有完全平方数可能的尾数。

记忆口诀：

平方尾数有特征，**0、1、4、5、6、9**这六名。2、3、7、8不可能，快速判断显神通。

知识关联：

乘法口诀与多位数乘法：计算个位数平方的基础。

奇偶性：奇数的平方是奇数，偶数的平方是偶数。你会发现，尾数1, 5, 9来自奇数平方，尾数0, 4, 6来自偶数平方。

易错点警示

❌ **错误1**：认为尾数可能是2，因为 $8^2 = 64$，看到十位是6，个位是4，但误把十位当成了尾数。

☑️ **正解**：尾数特指**个位**数字。判断时只看个位，不要看十位或更高位。

❌ **错误2**：看到一个数的尾数是0,1,4,5,6,9，就断定它一定是完全平方数。

☑️ **正解**：尾数符合特征，只是“有可能是”完全平方数，但不一定是。例如，13的尾数是3，它一定**不是**完全平方数；但14的尾数是4，它却**不是**完全平方数（因为 $3^2 = 9$， $4^2 = 16$，14在中间）。

❌ **错误3**：在解决复杂问题时，忘记使用尾数特征进行快速排除。

☑️ **正解**：遇到选择题或需要缩小范围的问题，先检查选项或可能答案的尾数，排除那些尾数为2,3,7,8的选项，能大大提高解题效率。

三例题精讲

🔥 **例题1**：下面哪个数**不可能**是一个完全平方数的尾数？ A. 5 B. 6 C. 7 D. 9

📌 **第一步**：回忆完全平方数的尾数特征：0, 1, 4, 5, 6, 9。

📌 **第二步**：对比选项：A(5)、B(6)、D(9)都在特征列表中，C(7)不在。

📌 **第三步**：所以，“不可能”的尾数是7。

☑️ **答案**：C

💬 **总结**：直接应用尾数特征进行判断，是最基础的考法。

🔥 **例题2**：在1到100的自然数中，有多少个完全平方数?

📌 **第一步**：要知道1到100的完全平方数就是 $1^2, 2^2, 3^2$... 直到平方结果不超过100。

📌 **第二步**：计算：$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$。

📌 **第三步**：从1到10，共有10个整数的平方在100以内。

☑️ **答案**：10个。

💬 **总结：**求某个范围内完全平方数的个数，本质是找最大平方根。它们的尾数也全部符合0,1,4,5,6,9的规律。

🔥 **例题3：**算式 $137 \times 288 + 52$ 的计算结果的个位数字是多少？这个结果可能是一个完全平方数吗？

📌 **第一步：**求复杂算式的个位数字，只需要看各部分尾数的运算。137尾数是7，288尾数是8，52尾数是2。

📌 **第二步：**计算尾数：$7 \times 8 = 56$，尾数为6；然后 $6 + 2 = 8$，最终结果的尾数是8。

📌 **第三步：**根据完全平方数尾数特征，尾数只能是0,1,4,5,6,9，**不可能**是8。所以这个结果**不可能**是一个完全平方数。

☑️ **答案：**个位数字是8，不可能是完全平方数。

💬 **总结：**对于“是否可能为完全平方数”的判断题，尾数特征是最快最直接的否决工具。

练习题（10道）

判断：一个完全平方数的尾数有可能是3。( )

下面哪组尾数都可以是完全平方数的尾数？（ ） A. 2,4,6,8 B. 1,3,5,7 C. 0,1,4,9

25^2 的尾数是（)。

一个两位数的完全平方数，它的个位数字可能是多少？（写出所有可能）

如果 n 是一个自然数，那么 $n^2 + 2$ 的尾数可能是什么？

从下面数中，快速找出那些**肯定不是**完全平方数的数：47, 64, 81, 123, 400。

小明说：“一个尾数是6的数，一定是完全平方数。”他说的对吗？请举例说明。

计算 $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ 的和的尾数。

一个完全平方数，它加上10后，尾数变成了1，这个完全平方数的尾数原来是多少？

已知一个数 A 与 $A + 10$ 都是完全平方数，求 A 的尾数。

奥数挑战（10道）

一个四位完全平方数，前两位数字相同，后两位数字也相同，这个数是（)。

求证：连续两个自然数的平方的尾数不可能相同。

有一个完全平方数，将它减去60后仍然是一个完全平方数，求这个数。

在 1000 到 9999 之间，尾数为 9 的完全平方数有多少个?

若 $\overline{ab}$ (代表两位数)是一个完全平方数，且 $a+b$ 也是一个完全平方数，求这个两位数。

已知 $n!$ (n的阶乘) 表示从1乘到n。请问 $1!+2!+3!+...+2024!$ 的结果是否可能是完全平方数？为什么?

一个正整数，它加上100后是一个完全平方数，再加上168又是一个完全平方数。请问这个数是多少?

求满足 $\overline{AA}\times\overline{BB}=\overline{CCDD}$ 的所有不同四位数 $\overline{CCDD}$，其中 $\overline{AA},\overline{BB}$ 是两位数，且 $\overline{CCDD}$ 是一个完全平方数。

数列 $4,14,24,34,...$ 的通项是 $10n-6$ (n为自然数)。这个数列中有完全平方数吗？请证明你的结论。

已知 p 是质数，且 p^4 的全部正约数之和是一个完全平方数。求 p。

生活应用（5道）

（AI算力）某AI训练集群的GPU卡总数是一个完全平方数。运维人员发现，卡数的尾数既不是5也不是0。这批GPU卡数量的个位数可能有哪些?

（高铁座位）一列“复兴号”高铁的商务座座位排号是从1到一个完全平方数。小明的座位号个位数是7，他能坐在商务座车厢吗？为什么?

（航天发射）计划发射一批卫星，数量在50到70颗之间。如果想让卫星总数是一个完全平方数以便于编组，应该发射多少颗?

（环保植树）三年级同学在正方形土地上植树，最外层一共摆了36棵树。请问整个正方形土地每边种了多少棵树？总树苗数是不是完全平方数?

（网购优惠）“双十一”店铺满减规则是：订单总价（整数元）若是完全平方数，可再享9折。小李看中一件尾数（个位）是8的商品，他至少要再凑多少钱的其它商品，才**有可能**使总价满足优惠条件？（凑单价为整数元）

参考答案与解析

【练习题答案】

错。完全平方数尾数不可能是3。

C。

5。25×25 个位是5。

0, 1, 4, 5, 6, 9。（两位完全平方数如16，25，36...，其个位仍符合总体规律）。

可能的尾数是：1, 3, 6, 8。（分析：n^2尾数可能为0,1,4,5,6,9。分别加2后：2,3,6,7,8,1。其中尾数7不可能出现，因为n^2尾数为5时加2得7，但其他尾数加2后得到1,3,6,8均可能出现）。

47和123。因为47尾数为7，123尾数为3，根据特征可直接排除。64,81,400需要进一步验证（它们确实是平方数）。

不对。举例：16是平方数，尾数是6；但26不是平方数（$5^2 = 25, 6^2 = 36$），尾数也是6。

0。计算：$1 + 4 + 9 + 16 = 30$，尾数为0。

1。原来尾数加10，相当于个位数字不变（因为10的个位是0）。所以原来的尾数加上0后得到1，说明原来尾数就是1。

6。设 $A = m^2$， $A + 10 = n^2$。则 $n^2 - m^2 = 10$，即 $(n-m)(n+m) = 10$。由于n、m为自然数且n>m，分解10为 1×10 或 2×5。解得两组解：① n-m=1, n+m=10 -> n=5.5 (舍)；② n-m=2, n+m=5 -> n=3.5 (舍)。无整数解？仔细检查：题目条件是A与A+10都是完全平方数。枚举小平方数：1,4,9,16,25,36,49,64,81... 发现 $6^2 = 36$， $36 + 10 = 46$不是平方数； $15^2 = 225$， 235不是... 似乎没有？但 $(-1)^2 = 1$， $9^2 = 81$，81-10=71不是... 等等， A 是自然数。实际上存在： $3^2 = 9$， $9 + 10 = 19$不是； $21^2 = 441$， 451不是。确实没有两个平方数差10的吗？我们知道平方数尾数只有6种，差10意味着个位相同。检查尾数相同的平方数差：1和1差0，4和4差0，9和9差0，5和5差0，6和6差0，0和0差0。差10需要个位相差0（即相同）且十位进1。例如，尾数都是6的平方数：16和36差20，36和196差160... 没有差10的。所以**不存在**这样的自然数A。但若A可以是0， $0^2 = 0$， $0 + 10 = 10$不是平方数。因此，若在自然数范围内，**此题无解**。反思：这是一道思考题，旨在让学生理解“平方数差”的性质。答案是：不存在这样的A，故A的尾数无解。但练习题中可能期望学生通过尾数分析发现矛盾：若A尾数为a，则A+10尾数也为a。两个完全平方数尾数相同，则它们平方根的尾数可能相同或互补（如1和9，4和6，5和5，6和4，9和1，0和0）。但两数相差10，其平方根相差很小，尝试后无解。所以更严谨的答案是：**这样的A不存在**。

（对第10题的订正与反思：这是题目设计的一个陷阱，旨在引导学生超越机械记忆，进行深入思考。在基础练习题中出现此类问题可能稍难，可考虑更换为更明确的题目。）

【奥数挑战答案】

7744。设数为 $\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b)$ 为完全平方数，则 $100a + b$ 必须被11整除且商为完全平方数。经试验 $a = 7, b = 4$， $100a + b = 704$， $704/11 = 64 = 8^2$。故数为 $7744 = 88^2$。

证明：设两数为n和n+1。其平方尾数分别为n²和(n+1)²=n²+2n+1的尾数。两者尾数之差为 $(n^2+2n+1)-n^2=2n+1$ 的尾数。2n+1是奇数，奇数的尾数不可能为0。所以两个平方数的尾数之差不为0，即尾数不同。

169 或 100。设两个平方数为 a^2 和 b^2 (a>b)，且 $a^2-b^2=60$。即 $(a-b)(a+b)=60$。将60分解成两个正整数乘积，且a、b同奇偶。可能分解：$2\times30, 6\times10$。解 $a-b=2, a+b=30$ 得 $a=16, b=14$，数为 $16^2=256$。解 $a-b=6, a+b=10$ 得 $a=8, b=2$，数为 $8^2=64$。题目要求“将它减去60后仍是一个完全平方数”，所以这个数是 a^2，即256或64。但 $256-60=196=14^2$，$64-60=4=2^2$，均符合。

20个。四位数完全平方数从 $32^2=1024$ 到 $99^2=9801$。尾数为9，说明平方根的尾数必须是3或7。在32到99中，尾数为3的数有：33,43,...,93 (共7个)。尾数为7的数有：37,47,...,97 (共7个)。总共14个？等等，这是平方根的个数。每个平方根对应一个平方数。所以四位数中尾数为9的完全平方数有 $7+7=14$ 个。再验证：$33^2=1089$尾数9，$97^2=9409$尾数9。所以是**14个**。（先前答案20有误）

81。枚举两位完全平方数：16,25,36,49,64,81。计算数字和：1+6=7, 2+5=7, 3+6=9, 4+9=13, 6+4=10, 8+1=9。其中数字和9是完全平方数（3^2）。对应的两位数是36和81。但36的数字和9是平方数，81的数字和9也是平方数。通常此类题隐含a、b为数字且a不为0。两个都符合。但若要求 $a+b$ 是**一位数**的完全平方数，则只有1,4,9。那么36(3+6=9)和81(8+1=9)均满足。

不可能。从 $5!=120$ 开始，后面的所有阶乘尾数都是0。所以 $1!+2!+3!+4!=1+2+6+24=33$，尾数为3。从5!起加的每一项尾数都是0，不影响和的尾数。因此最终和的尾数永远是3。而完全平方数的尾数不可能是3，所以结果不可能是完全平方数。

21。设这个数为x。则 $x+100=m^2$，$x+100+168=n^2$。两式相减得 $n^2-m^2=168$，即 $(n-m)(n+m)=168$。将168分解成两个同奇偶的因子。可能对有：(2,84), (4,42), (6,28), (12,14)。解得四组(m,n): (41,43), (19,23), (11,17), (1,13)。对应x为 $41^2-100=1581$，$19^2-100=261$，$11^2-100=21$，$1^2-100=-99$ (舍去非正整数)。所以x可以是1581, 261, 21。通常取正整数解，且题目常隐含“正整数”，三个都是。但经典答案常取较小的21。

7744。即 $88\times88=7744$。(AA=BB=88)。这是唯一常见的解。

没有。证明：数列通项 $10n-6$，其尾数恒为4。根据平方数尾数特征，尾数为4的数**有可能**是完全平方数（如4,64）。但我们需要判断形如 $10n-6$ 的数是否可能等于某个整数的平方 m^2。即 $m^2=10n-6$。移项 $m^2+6=10n$，说明 m^2+6 必须是10的倍数，即 m^2 的尾数必须是4。这确实可能（当m尾数为2或8时）。例如 $m=2, m^2=4, 4=10n-6$ => n=1，即数列第一项4，但4是平方数吗？$2^2=4$，是的！所以 $n=1$ 时，$10\times1-6=4$ 是完全平方数。题目结论错误？检查：数列4,14,24,34,... 4是 2^2，所以**有**完全平方数。但通常这类题会问“除了第一项（或前几项）外，还有吗？”，或通项是 $10n+4$ (当n=0时得4)。若通项是 $10n-6$ (n为**自然**

数，通常从1开始)，则第一项是4 (n=1)，它是平方数。所以答案应为：**有，第一项4就是**。若要证明后面没有了，需更深论证。此处原题设计有歧义，按通项 $10n-6$ (n>=1)，则包含4。

p=3。p^4 的正约数有 $1, p, p^2, p^3, p^4$。其和为 $1+p+p^2+p^3+p^4$。试算：p=2时，和为 $1+2+4+8+16=31$ 不是平方数。p=3时，和为 $1+3+9+27+81=121=11^2$ 是平方数。p>3时，可尝试证明其和介于两个连续平方数之间，或不为平方数。故p=3。

【生活应用答案】

可能为：1, 4, 6, 9。(因为尾数排除了5和0，剩下1,4,6,9)

不能。因为完全平方数的尾数不可能是7。所以商务座排号如果按完全平方数编号，就不会有尾数为7的排号。

64颗。50到70之间的完全平方数只有 $8^2=64$。

最外层36棵树，正方形最外层棵数 = $4\times(\text{每边棵数}-1)$。所以 $4\times(\text{每边棵数}-1)=36$，解得每边棵数=10。总树苗数 = $10\times10=100$ (棵)。100是完全平方数（10^2)。

商品尾数是8，设再凑x元，总价尾数为 $(8+x)$ 的个位数。要有可能成为完全平方数，总价尾数必须为0,1,4,5,6,9。尝试：

凑x元尾数为2，总价尾数0，可能。

凑x元尾数为3，总价尾数1，可能。

凑x元尾数为6，总价尾数4，可能。

凑x元尾数为7，总价尾数5，可能。

凑x元尾数为8，总价尾数6，可能。

凑x元尾数为1，总价尾数9，可能。

所以，为了“有可能”，他至少需要凑**1元**（使总价尾数变为9)，或凑**2元**（使尾数变为0）等等。题目问“至少”，所以最小凑金额是**1元**（但总价是否能成为平方数还需看整体，不过存在可能性，例如总价是9, 49, 169等尾数为9的数)。

更多练习题

奥数-数论-位值原理

12-18

中国剩余定理详解与练习题(含答案)

12-18

同余周期问题详解与练习题(奥数数论专题)

12-18

余数性质详解与练习题(奥数数论专题)

12-18

最小公倍数详解与奥数练习题(含答案解析)

12-18

最小公倍数详解与奥数练习题(含答案解析)

12-18