

奥数-数论-因数个数公式

本资料为小学数学 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

知识要点

本节我们来学习如何快速求出一个数有多少个因数，而不用一个一个去列举。

💡 核心概念：因数个数公式

一个大于1的自然数，都可以写成几个质数相乘的形式，这叫**分解质因数**。比如， $12 = 2^2 \times 3^1$ 。因数个数公式告诉我们：一个数因数的个数，等于它**每个质因数的指数加1后，再连乘**。

简单说，就是看这个数分解质因数后，肩膀上的“小指数”们。把每个“小指数”加1，然后乘起来，得到的结果就是因数的总个数。

📝 计算法则

求一个数 N 的因数个数，具体步骤如下：

分解质因数：把数 N 写成 $N = a^m \times b^n \times c^p \times \dots$ 的形式。其中 $a, b, c\dots$ 是质数， $m, n, p\dots$ 是它们的指数。

指数加一：分别给每个质因数的指数加1，得到 $(m + 1), (n + 1), (p + 1)\dots$ 。

连乘求积：将这些结果相乘，即 $(m + 1) \times (n + 1) \times (p + 1) \times \dots$ 。

得到答案：最后的乘积就是数 N 的因数总个数。

◎ 记忆口诀

质因数分解是地基，指数加一再连乘。

📎 知识关联

因数与倍数：本知识的基础，理解什么是因数。

质数与合数：知道什么是质数，才能进行分解。

分解质因数：本知识的核心前置技能，必须熟练掌握。

易错点警示

列出学生最常犯的3个错误：

- ✗ **错误1：忘记给指数“加1”。** 例如：求 $12 = 2^2 \times 3^1$ 的因数个数，错误地算成 $2 \times 1 = 2$ 个。
- ✓ **正解：**指数要分别加1后再相乘： $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$ (个)。12的因数有1,2,3,4,6,12，共6个。
- ✗ **错误2：把“指数加1”后的结果“相加”。** 例如：求 $18 = 2^1 \times 3^2$ 的因数个数，错误地算成 $(1 + 1) + (2 + 1) = 2 + 3 = 5$ 个。
- ✓ **正解：**应该是相乘： $(1 + 1) \times (2 + 1) = 2 \times 3 = 6$ (个)。18的因数有1,2,3,6,9,18，共6个。
- ✗ **错误3：分解质因数时出错，导致后续计算全错。** 例如：将 50 错误地分解为 5×10 。
- ✓ **正解：**必须分解到全部是质数相乘： $50 = 2 \times 5^2$ 。然后计算因数个数： $(1 + 1) \times (2 + 1) = 2 \times 3 = 6$ (个)。
- ### 三例题精讲
- 🔥 **例题1：**求 28 有多少个因数。
- 💡 第一步：分解质因数。 $28 = 2^2 \times 7^1$ 。
- 💡 第二步：指数加一。2的指数是2，加1得3；7的指数是1，加1得2。
- 💡 第三步：连乘求积。 $3 \times 2 = 6$ 。
- ✓ **答案：**28 有 6 个因数。
- 💬 **总结：**对于较小的数，先熟练运用公式，可以验证 (1,2,4,7,14,28)。
- 🔥 **例题2：**求 360 的因数个数。
- 💡 第一步：分解质因数。 $360 = 36 \times 10 = (6 \times 6) \times (2 \times 5) = (2 \times 3)^2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ 。建议用短除法系统分解。
- 💡 第二步：指数加一。2的指数是3，加1得4；3的指数是2，加1得3；5的指数是1，加1得2。
- 💡 第三步：连乘求积。 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 。
- ✓ **答案：**360 有 24 个因数。

总结：对于较大的数，分解质因数是关键且第一步，务必准确、彻底。

例题3：一个数只有两个质因数2和3，且它有12个因数。这个数最小是多少？

第一步：设这个数为 $2^m \times 3^n$ 。根据公式，因数个数为 $(m+1)(n+1) = 12$ 。

第二步：找乘积为12的(m+1, n+1)组合。12可以拆成：12 × 1, 6 × 2, 4 × 3。对应的m和n为：

$m+1 = 12, n+1 = 1 \rightarrow m = 11, n = 0$ (n=0意味着没有质因数3，不符合“有两个质因数”条件，舍去)

$m+1 = 6, n+1 = 2 \rightarrow m = 5, n = 1 \rightarrow$ 数为 $2^5 \times 3^1 = 32 \times 3 = 96$

$m+1 = 4, n+1 = 3 \rightarrow m = 3, n = 2 \rightarrow$ 数为 $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

$m+1 = 3, n+1 = 4 \rightarrow m = 2, n = 3 \rightarrow$ 数为 $2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$

(还有对称情况，但求最小数，只需比较上述有效组合)

第三步：比较大小，找出最小的数。72 < 96 < 108。

答案：这个数最小是 72。

总结：这是公式的逆向应用。已知因数和质因数种类，通过“指数加一之积”反推可能的指数组合，再求最小的数。

练习题 (10道)

利用公式，求 16 的因数个数。

利用公式，求 45 的因数个数。

利用公式，求 100 的因数个数。

一个数 $A = 2^4 \times 5^2$ ，它有多少个因数？

一个数分解质因数为 3×7^2 ，它有多少个因数？

六（一）班有学生人数恰好等于 $2^2 \times 3 \times 7$ ，请问这个班可能有多少名学生？

一个篮子里苹果的个数，分解质因数后是 2×3^3 ，请问苹果可能有多少个？

求 144 的因数个数。

求 210 的因数个数。

已知 $B = 2^a \times 3^1$, 且 B 有 8 个因数, 求 a 的值。

奥数挑战 (10道)

求 1024 的因数个数。

一个数有 9 个因数, 这个数最小是多少?

1500 有多少个因数?

一个数是 30 的倍数, 且恰好有 30 个因数。这个数最小是多少?

两个数 $a = 2^5 \times 3^7 \times 5$, $b = 2^3 \times 3^2 \times 5^4$, 那么 $a \times b$ 的积有多少个因数?

在 1 到 100 的自然数中, 因数个数最多的数是几? 它有多少个因数?

一个数的因数个数是奇数, 这个数有什么特征? 请证明你的结论。

已知一个自然数有 10 个因数, 且它只有 2 和 5 两个质因数, 这个数最小是多少?

求 $(2^4 \times 3^2 \times 5)$ 和 $(2^2 \times 3^3 \times 7)$ 的最大公因数的因数个数。

一个数的平方有 45 个因数, 求这个数最少有多少个因数?

生活应用 (5道)

(高铁规划) 一列“复兴号”高铁有若干节车厢。若总座位数能分解为 $2^3 \times 5^2 \times 7$, 这列高铁总座位数有多少种不同的因数? 这对应了多少种不同的车厢编组方式 (假设每种编组座位数不同) ?

(AI训练) 某AI模型训练需要将一批图片均匀分配给多个GPU核心同时处理。如果图片总张数是 360 张, 为了保证没有剩余, 每个核心分配的图片张数有多少种可能?

(航天发射) 航天中心计划发射一颗卫星, 其轨道调整发动机的点火次数是一个合数。已知这个数的质因数只有 2 和 3, 且因数个数为 15。请问这个点火次数最小可能是多少?

(环保植树) 环保小组同学在校园里植树。他们买的树苗总数 N 是一个两位数, 且 N 的因数个数恰好是 6。请问他们最多可能买了多少棵树? 最少呢?

(网购促销) 电商平台设计一个“满减”游戏: 用户订单金额 (整数元) 的因数个数如果是偶数, 立减10元; 如果是奇数, 立减5元。小明的订单金额是 120 元, 他能获得哪种立减优惠?

参考答案与解析

【练习题答案】

$16 = 2^4$, 因数个数: $4 + 1 = 5$ 。

$45 = 3^2 \times 5^1$, 因数个数: $(2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$ 。

$100 = 2^2 \times 5^2$, 因数个数: $(2 + 1) \times (2 + 1) = 3 \times 3 = 9$ 。

$(4 + 1) \times (2 + 1) = 5 \times 3 = 15$ 个。

$3^1 \times 7^2$, 因数个数: $(1 + 1) \times (2 + 1) = 2 \times 3 = 6$ 个。

$2^2 \times 3 \times 7 = 84$, 就是84名学生。问“可能有多少名”是在练习分解, 答案就是84。

$2 \times 3^3 = 54$, 苹果有54个。

$144 = 12^2 = (2^2 \times 3)^2 = 2^4 \times 3^2$, 因数个数: $(4 + 1) \times (2 + 1) = 5 \times 3 = 15$ 。

$210 = 21 \times 10 = 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$, 因数个数: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 。

根据公式, $(a + 1) \times (1 + 1) = 8$, 所以 $(a + 1) \times 2 = 8$, $a + 1 = 4$, $a = 3$ 。

【奥数挑战答案】

$1024 = 2^{10}$, 因数个数: $10 + 1 = 11$ 。

$9 = 9 \times 1 = 3 \times 3$ 。要使数最小, 应让指数大的底数小。

对应 $m + 1 = 9$, $n + 1 = 1 \rightarrow$ 数 = $2^8 = 256$

对应 $m + 1 = 3$, $n + 1 = 3 \rightarrow$ 数 = $2^2 \times 3^2 = 36$

比较得最小为 36。

$1500 = 15 \times 100 = 3 \times 5 \times (2^2 \times 5^2) = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$, 因数个数: $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (3 + 1) = 3 \times 2 \times 4 = 24$ 。

数是30的倍数, 则至少含有质因数2,3,5, 设数为 $2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots$, 且 $a, b, c \geq 1$ 。因数个数 $(a + 1)(b + 1)(c + 1)\dots = 30$ 。分解30, 并考虑最小化这个数。 $30 = 30 \times 1 \times 1\dots$ (舍去), 或 $15 \times 2 \times 1\dots$ (舍去), 或 $10 \times 3 \times 1\dots$ (舍去), 或 $6 \times 5 \times 1\dots$, 或 $5 \times 3 \times 2$ 。

组合 $(a + 1, b + 1, c + 1) = (6, 5, 1) \rightarrow a = 5, b = 4, c = 0$ ($c=0$ 不满足条件, 舍去)

组合 $(5, 3, 2) \rightarrow a = 4, b = 2, c = 1 \rightarrow$ 数 = $2^4 \times 3^2 \times 5^1 = 720$

组合 $(10, 3, 1) \rightarrow a = 9, b = 2, c = 0$ (舍去)

组合 $(15, 2, 1) \rightarrow a = 14, b = 1, c = 0$ (舍去)

检查其他分配方式 (如指数给更多质因数) 会使数更大。因此最小数是720。

$a \times b = (2^5 \times 3^7 \times 5^1) \times (2^3 \times 3^2 \times 5^4) = 2^8 \times 3^9 \times 5^5$ 。因数个数: $(8 + 1) \times (9 + 1) \times (5 + 1) = 9 \times 10 \times 6 = 540$ 。

要使因数个数多, 应让质因数种类多且指数尽可能平均。100以内: $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, 因数12个; $72 = 2^3 \times 3^2$, 因数12个; $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, 因数12个; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, 因数12个; $96 = 2^5 \times 3$, 因数12个。最大的是12个因数。

一个数的因数个数是奇数, 这个数一定是完全平方数。证明: 根据公式, 因数个数是各指数加1的连乘积。要使乘积为奇数, 每个乘数 $(m + 1)$ 都必须是奇数, 所以每个指数 m 都必须是偶数。

即所有质因数的指数都是偶数，那么这个数就是某个整数的平方。

$10 = 10 \times 1 = 5 \times 2$ 。对应：

$(m+1, n+1) = (10, 1) \rightarrow m = 9, n = 0$ (舍去，需两个质因数)

$(5, 2) \rightarrow m = 4, n = 1 \rightarrow$ 数 $= 2^4 \times 5^1 = 80$

$(2, 5) \rightarrow m = 1, n = 4 \rightarrow$ 数 $= 2^1 \times 5^4 = 1250$

最小为 80。

最大公因数取相同质因数的最小指数： $gcd = 2^2 \times 3^2$ 。其因数个数： $(2+1) \times (2+1) = 3 \times 3 = 9$ 。

设这个数为 $N = a^m \times b^n \times \dots$ ，则 $N^2 = a^{2m} \times b^{2n} \times \dots$ 。 N^2 的因数个数为 $(2m+1)(2n+1)\dots = 45$ 。45分解为 45×1 或 15×3 或 9×5 。要使 N 的因数个数 $(m+1)(n+1)\dots$ 最少，应让质因数种类尽量少。考虑两种组合：

$(2m+1, 2n+1) = (45, 1) \rightarrow m = 22, n = 0 \rightarrow N$ 的因数个数 $= 23 \times 1 = 23$

$(15, 3) \rightarrow m = 7, n = 1 \rightarrow N$ 的因数个数 $= 8 \times 2 = 16$

$(9, 5) \rightarrow m = 4, n = 2 \rightarrow N$ 的因数个数 $= 5 \times 3 = 15$

最少为15个。

【生活应用答案】

总座位数 $= 2^3 \times 5^2 \times 7^1$ 。因数个数 $= (3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ 种。即有24种不同的因数，对应24种不同的分配方案（假设每种方案对应一种车厢座位数）。

此题即求360有多少个因数。 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$ ，因数个数 $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ 种可能。

设数为 $2^a \times 3^b$ ，因数个数 $(a+1)(b+1) = 15$ 。15可拆为 15×1 或 5×3 。

$a+1 = 15, b+1 = 1 \rightarrow a = 14, b = 0$ (舍去，b需至少为1)

$a+1 = 5, b+1 = 3 \rightarrow a = 4, b = 2 \rightarrow$ 数 $= 2^4 \times 3^2 = 144$

$a+1 = 3, b+1 = 5 \rightarrow a = 2, b = 4 \rightarrow$ 数 $= 2^2 \times 3^4 = 324$

最小可能点火次数是144次。

因数个数为6。 $6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$ 。对应数的结构为： p^5 或 $p^2 \times q^1$ ，其中p, q为不同质数。

形如 p^5 的两位数： $2^5 = 32, 3^5 = 243$ (超)。所以有32。

形如 $p^2 \times q$ 的两位数：枚举质数p,q。

$2^2 \times q: q=5 \rightarrow 20, q=7 \rightarrow 28, q=11 \rightarrow 44, q=13 \rightarrow 52, q=17 \rightarrow 68, q=19 \rightarrow 76, q=23 \rightarrow 92$ 。

$3^2 \times q: q=2 \rightarrow 18, q=5 \rightarrow 45, q=7 \rightarrow 63, q=11 \rightarrow 99$ 。

$5^2 \times q: q=2 \rightarrow 50, q=3 \rightarrow 75$ 。

$7^2 \times q: q=2 \rightarrow 98$ 。

所有可能数：18, 20, 28, 32, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99。最多99棵，最少18棵。

$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ 。其因数个数 = $(3 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$ ，是偶数。因此小明获得“立减10元”优惠。

更多精彩内容请访问 **星火网** www.xinghuo.tv

PDF 文件正在生成中, 请稍后再来...

更多练习题

奥数-数论-分解质因数

12-18

奥数-数论-质数合数判断

12-18

奥数-数论-整除特征7-11-13

12-18

奥数-数论-整除特征3-9

12-18

奥数-数论-整除特征2-5-4-8

12-18

奥数-行程-发车间隔

12-18

