奥数-几何-鸟头模型应用

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：鸟头模型：倍数应用 原理

核心概念： 嘿嘿，大家好，我是阿星！咱们今天来聊聊“鸟头模型”。别被名字吓到，它就像一只小鸟张开的嘴巴（喙）。想象一下，这个嘴巴由两条边组成，夹着一个角。当我们把这条边像拉拉面一样拉长到原来的 2 倍，另一条边像橡皮筋一样拉到原来的 3 倍，那么这张“鸟嘴”(也就是它围成的三角形）的面积会变成几倍呢？很简单，别想复杂了，就像我给小鸟喂食，一次喂 2 份，一天喂 3 次，总共就喂了 $2 \times 3 = 6$ 份。所以面积也直接相乘：$2 \times 3 = 6$ 倍！这就是“鸟头模型”倍比关系的核心——**边长的倍数相乘，就是面积的倍数**。

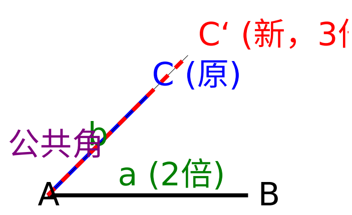
计算秘籍：

找鸟头： 在图形中找到共享一个角（公共顶点）的两个三角形，它们就像共享一个“嘴角”。

标边长： 找出组成这个“嘴角”的两条边，并确定它们分别在两个三角形中对应的长度倍数关系。设原始边长分别为 a 和 b，变化后为 $m \cdot a$ 和 $n \cdot b$。

算面积： 那么这两个三角形的面积比（或面积扩大倍数）就等于它们两边长度倍数比的乘积，即 $\frac{S_{新}}{S_{原}} = m \times n$。如果原面积是 S，新面积就是 $m \times n \times S$。

阿星口诀： 鸟头分两半，倍数找边看；面积怎么变？相乘最简单！



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：看到两条边变化，想当然地把倍数**相加**。比如，一边变2倍，另一边变3倍，误以为面积是 $2+3=5$ 倍。 → ✅ 正解：面积是**相乘**关系，不是相加。核心在于面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$，当夹角不变时，面积之比等于两边长度之比的乘积，即 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}$。

❌ 错误2：只顾边长的倍数，忽略了**夹角必须相同**。如果角变了，这个"鸟头模型"的倍数关系就不成立了。 → ✅ 正解：牢记前提——"共角"（共用同一个角）。这是模型成立的"生命线"。

🔥 例题精讲

例题1：阿星有一块三角形的巧克力，他决定做一个超大号分享装。他将巧克力两条边的长度分别延长到了原来的 2 倍和 4 倍（夹角不变）。请问新巧克力的面积是原来的几倍？

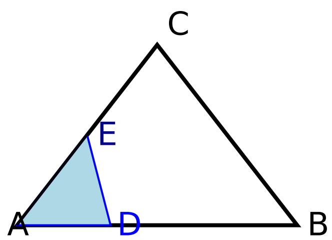
📌 **解析**：

这正是标准的鸟头模型应用场景：两条边按倍数变化，夹角不变。

根据阿星口诀"面积怎么变？相乘最简单！"，直接计算倍数：$2\times4=8$。

✅ **总结**：直接应用模型，**倍数相乘**。新面积是原面积的 8 倍。

例题2：在三角形 ABC 中，点 D 在 AB 边上，且 $AD=\frac{2}{3}AB$；点 E 在 AC 边上，且 $AE=\frac{1}{2}AC$。请问三角形 ADE 的面积是三角形 ABC 面积的几分之几？



📌 **解析**：

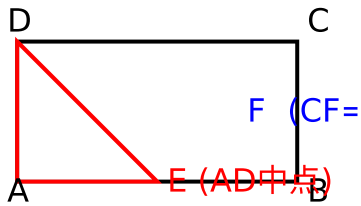
观察图形，三角形 ADE 和三角形 ABC 共享 $\angle A$，构成"鸟头模型"。

找出边长的倍数关系：在 AB 边上，AD 是 AB 的 $\frac{2}{3}$；在 AC 边上，AE 是 AC 的 $\frac{1}{2}$。

根据鸟头模型面积比公式：$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$。

☑ **总结**：将线段比（分数倍）直接代入相乘，得到面积比。关键在于**准确找到共角的两组对应边之比**。

例题3：如图所示，长方形 $ABCD$ 中，E 是 AD 中点，F 是 CD 上一点，且 $CF = \frac{1}{3}CD$。连接 BF 和 BE，请问三角形 BEF 的面积是长方形 $ABCD$ 面积的几分之几？



解析：

目标三角形 BEF 不直接是鸟头，我们需要用整体减空白的方法。设长方形面积为 S。

三角形 ABE 与长方形共享 $\angle A$，其中 $AE = \frac{1}{2}AD$，$AB = AB$。所以 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times 1 \times S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2}S) = \frac{1}{4}S$。（因为三角形ABD是长方形面积的一半）

三角形 BCF 与长方形共享 $\angle C$，其中 $BC = BC$，$CF = \frac{1}{3}CD$。所以 $S_{\triangle BCF} = 1 \times \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2}S) = \frac{1}{6}S$。

三角形 EDF 中，$DE = \frac{1}{2}AD$，$DF = \frac{2}{3}CD$。其面积可看作长方形面积的 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$? 等等，这里需要小心：三角形EDF的边DE和DF分别来自长方形的长和宽，且夹角为90度，也满足鸟头模型。它在长方形中的占比为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。所以 $S_{\triangle EDF} = \frac{1}{6}S$。

因此，$S_{\triangle BEF} = S - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle BCF} - S_{\triangle EDF} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{6}S - \frac{1}{6}S = S - \frac{11}{24}S = \frac{13}{24}S$。

☑ **总结**：在复杂图形中，鸟头模型是求**部分三角形面积**的利器。通过它将未知面积转化为已知整体面积的分数，是解题的关键步骤。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

一个三角形的两条边同时扩大到原来的 3 倍（夹角不变），面积扩大到原来的（ ）倍。

三角形的一条边扩大 4 倍，另一条边扩大 5 倍，面积扩大（ ）倍。

一个平行四边形的相邻两边分别扩大到原来的 2 倍和 3 倍，面积扩大到原来的（ ）倍。（提示：平行四边形可分割为两个全等三角形）

在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AB 上，且 $AD:DB=1:2$，点 E 在 AC 上，且 $AE:EC=2:1$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=$ ( )。

一个三角形的底边扩大到原来的 6 倍，对应的高扩大到原来的 2 倍，面积扩大到原来的（ ）倍。（想想这和鸟头模型的关系）

如果三角形两条边的长都缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，面积缩小到原来的（ ）。

在三角形中，共享一个顶点的两个小三角形，一条公共边占比为 $1:3$，另一条公共边占比为 $1:4$，则它们的面积比是（ ）。

阿星把一块三角形蛋糕的两条边分别切成了原来的 $\frac{1}{5}$ 和 $\frac{1}{2}$ 长（从顶点开始切），那么剩下的那块小蛋糕面积是原来的（ ）。

若 $\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{4}{9}$，且它们共享一个角，已知在这个角上，$PQ:XY=2:3$，那么另一组边的比 $PR:XZ=$ ( )。

判断题：鸟头模型中，面积倍数总是等于两边倍数之和。（ ）

二、奥数挑战

（杯赛真题改编）在四边形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的三等分点且靠近 A，F 是 BC 的中点，G 是 CD 的四等分点且靠近 C，H 是 DA 的五等分点且靠近 D。连接 EF,FG,GH,HE，求四边形 $EFGH$ 的面积是四边形 $ABCD$ 面积的几分之几?

已知三角形 ABC 面积为 1，D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上，且 $BD:DC=2:1$，$CE:EA=3:2$，$AF:FB=1:4$。求三角形 DEF 的面积。

如图所示，在三角形 ABC 中，D,E 为 BC 边上的三等分点，F 为 AC 中点，AD 与 BF 交于点 O，求四边形 $ODFE$ 的面积与三角形 ABC 的面积比。

长方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=4$。点 E 在 BC 上，$BE=1$；点 F 在 CD 上，$CF=2$。求三角形 AEF 的面积。

三角形 ABC 中，D 是 AB 中点，E 是 AC 上一点，且 $AE=2EC$。CD 与 BE 交于点 F。求三角形 BFC 与三角形 ABC 的面积比。

梯形 $ABCD$（$AD \parallel BC$）中，$AD:BC=2:5$。E 是 AB 上一点，$AE:EB=3:2$；F 是 CD 上一点，$DF:FC=1:4$。连接 EF，求四边形 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 的面积比。

点 P 在三角形 ABC 内部，连接 AP, BP, CP 并延长交对边于 D, E, F。已知 $BD : DC = 1 : 2$，$CE : EA = 3 : 1$，求 $AF : FB$。

正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 24，连接 AC, CE, EA，求三角形 ACE 的面积。

在三角形 ABC 中，D 为 BC 上一点，且 $BD = 2DC$，E 为 AD 中点。直线 BE 交 AC 于 F。求 $S_{\triangle AEF} : S_{\triangle ABC}$。

四边形 $ABCD$ 对角线交于点 O，$S_{\triangle AOB} = 4$，$S_{\triangle BOC} = 9$，$S_{\triangle COD} = 6$。求 $S_{\triangle AOD}$。

第三关：生活应用（5道）

（AI绘图）阿星用AI生成一张三角形图案。在参数调整中，他将决定图案形状的两条关键边的参数分别调为原来的 1.5 倍和 0.8 倍（夹角固定）。请问新图案的面积是原图案的百分之几?

（航天科技）一块用于卫星的三角形太阳能帆板，为了增加功率，工程师将其设计为：在保持夹角不变的前提下，将两条收集边延长至原来的 2.2 倍和 3.5 倍。请问其光电收集面积理论上是原来的多少倍？（结果保留一位小数）

（网购包装）商家要设计一个三角形的品牌贴纸。大号礼盒用的贴纸，需要将小号贴纸的两条边分别放大到原来的 2 倍和 2.5 倍。已知小号贴纸面积为 $10\ \mathrm{cm}^2$，请问制作一个大号贴纸需要多少平方厘米的材料?

（城市规划）一块三角形的街心绿地需要扩建。规划方案是：保持一个角不变，将这个角的两条边分别向延长线方向扩展为原来的 k 倍和 m 倍。请写出新绿地面积 $S_{新}$ 与原面积 $S_{原}$ 的关系式。如果 $k = 1.8, m = 2.4$，面积增加多少百分比?

（游戏开发）在一款策略游戏中，一种魔法效果能使一个“法术区域”(三角形）的两条边瞬间变为原来的 x 倍和 y 倍（$x, y > 0$)。请写出该魔法效果覆盖面积的变化倍数公式。如果 $x = 0.5$（缩小），$y = 4$（扩大），最终面积是原来的几倍？这个结果给你的启发是什么?

常见疑问 FAQ

专家问答：鸟头模型：倍数应用 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难?

答：难点通常不在计算本身（相乘很简单），而在于**识别和构造**。学生往往：1）在复杂图形中找不到或认不出“共角”的两个三角形；2）容易混淆**面积倍数**与**线段长度倍数**，忘了是相乘关系；3）当倍数以比例（如 $AD:DB=2:3$）给出时，容易找错对应边的全长（到底是 AD 和 AB 比，还是 AD 和 $AD+DB$ 比？）。关键在于理解本质：鸟头模型是三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 在**夹角C不变**时的直接推论，即面积比 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{b_1}{b_2}$。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大，它是**几何比例思想**的基石之一。1）**直接关联相似形**：鸟头模型可以看作是相似三角形面积比（等于相似比的平方）的一个特例和预备。当 $m=n$ 时，面积倍数为 m^2，这正是相似比。2）**解决复杂面积问题的核心工具**：在小学奥数、初中几何乃至高中向量几何中，将不规则图形面积比转化为线段比例相乘，是化繁为简的经典策略。3）**培养代数思维**：用字母表示倍数（m,n），并用乘积 $m\times n$ 表示结果，是函数思想的雏形，即面积变化是两条边变化的乘积函数 $f(m,n)=m\cdot n$。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！可以总结为“**一看、二找、三乘**”六字诀。

一看：观察图形，寻找**拥有公共顶点的两个三角形**。

二找：找出这个公共角**两条边上的线段比例关系**。务必明确谁是“整条边”，谁是“部分边”。常用方法是：**将共角的两条边分别看作整体**。

三乘：将找到的两个比例（分数或倍数）**直接相乘**，即得面积比。

核心公式铭记于心：$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\text{边1比}}{\text{边2比}}$。遇到复杂图形，多尝试用这个套路去分解，往往能迎刃而解。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$3\times 3=9$（倍）

$4\times 5=20$（倍）

$2\times3=6$（倍）解析：平行四边形面积等于底乘高，也可看作两个共用一条对角线的三角形，每个三角形都适用鸟头模型的推广。
$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ 解析：$AD:AB=1:3$， $AE:AC=2:3$。
$6\times2=12$（倍）解析：底和高相当于共角（90度）的两条边。
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
$1\times3:1\times4=3:4$? 不对。应为 $(1:3)\times(1:4)=1:12$? 仔细审题：“一条公共边占比为 $1:3$”意思是两三角形在这条边上的长度比为 $1:3$，“另一条公共边占比为 $1:4$”同理。所以面积比为 $(1:3)\times(1:4)=1:12$。
$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$
设 $PR:XZ=k$，则 $\frac{2}{3}\times k=\frac{4}{9}$，解得 $k=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$。
错误，是乘积关系。

二、奥数挑战

解析：连接 AC，将四边形分割。利用鸟头模型分别求出四个角上小三角形占整个四边形的比例，然后用 1 减去它们。过程略，答案为 $\frac{77}{240}$。
解析：设 $S_{\triangle ABC}=1$。由鸟头模型：
$S_{\triangle BDF}=\frac{BD}{BC}\times\frac{BF}{BA}\times S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times1=\frac{8}{15}$。同理，
$S_{\triangle CDE}=\frac{CD}{CB}\times\frac{CE}{CA}\times1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times1=\frac{1}{5}$。
$S_{\triangle AEF}=\frac{AF}{AB}\times\frac{AE}{AC}\times1=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times1=\frac{2}{25}$。
所以 $S_{\triangle DEF}=1-\frac{8}{15}-\frac{1}{5}-\frac{2}{25}=1-\frac{40}{75}-\frac{15}{75}-\frac{6}{75}=\frac{14}{75}$。
解析：连接 FC。多次运用鸟头模型和等高模型。设 $S_{\triangle ABC}=1$。过程略，答案：$\frac{1}{4}$。
解析：$S_{\triangle AEF}=S_{长方形}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ECF}-S_{\triangle ADF}$。$S_{长方形}=6\times4=24$。
$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times6\times1=3$
$S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}\times(4-1)\times2=3$
$S_{\triangle ADF}=\frac{1}{2}\times4\times(6-2)=8$
所以 $S_{\triangle AEF}=24-3-3-8=10$。
解析：连接 AF。利用燕尾模型或多次鸟头模型。设 $S_{\triangle ABC}=1$。过程略，答案：$\frac{2}{5}$。
解析：连接 AC，将梯形分为两个三角形。设 $AD=2$， $BC=5$，高为 h。则 $S_{梯形}=\frac{(2+5)h}{2}=3.5h$。利用鸟头模型分别求出各部分面积比，过程略，答案：$\frac{33}{82}$。
解析：使用塞瓦定理：$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，代入得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{AF}{FB}=1$，解得 $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3}$。
解析：正六边形可分成 6 个全等的等边三角形。连接 BE，可证 $ABCE$ 是平行四边形，其面积为 $24\times\frac{2}{3}=16$? 更直接的方法：三角形 ACE 是正六边形面积的 $\frac{1}{2}$。所以面积为 $24\times\frac{1}{2}=12$
。

解析：过 D 作 $DG \parallel BF$ 交 AC 于 G。利用平行线分线段成比例和鸟头模型。设 $S_{\triangle ABC} = 1$。过程略，答案：$\frac{1}{10}$。

解析：对角线分割的四个三角形，相对两个三角形面积乘积相等。即 $S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \times S_{\triangle AOD}$。代入：$4 \times 6 = 9 \times S_{\triangle AOD}$，解得 $S_{\triangle AOD} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$。

第三关：生活应用

$1.5 \times 0.8 = 1.2 = 120\%$

$2.2 \times 3.5 = 7.7$（倍）

$2 \times 2.5 \times 10 = 50\ (\mathrm{cm}^2)$

关系式：$S_{新} = k \cdot m \cdot S_{原}$。增加百分比：$(1.8 \times 2.4 - 1) \times 100\% = (4.32 - 1) \times 100\% = 332\%$。

公式：面积变化倍数 $= x \cdot y$。当 $x = 0.5, y = 4$ 时，倍数为 $0.5 \times 4 = 2$（倍）。启发：面积的缩放是各维度缩放因子的**乘积效应**，一个维度的缩小可以被另一个维度的放大所补偿甚至超越。

更多练习题

奥数-几何-鸟头模型公式

12-19

奥数-几何-矩形一半模型

12-19

奥数-几何-一半模型基础

12-19

奥数-几何-等积变形

12-19

奥数-几何-割补法求面积

12-19

奥数-计算-循环小数化分数

12-19