奥数-几何-鸟头模型公式

刚刚 0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：鸟头模型：基本公式 原理

核心概念：大家好，我是阿星！今天我们来认识一对神奇的“共享嘴巴”的三角形兄弟。想象一下，一个大鸟头（大三角形）和一个小鸟头（小三角形），它们共享同一个“嘴巴”(角)。这两个三角形，我们亲切地称为“共角三角形”。阿星的独家推导发现：小鸟头面积与大鸟头面积的比值，竟然等于它们组成这个“嘴巴”的两条边（我们称之为“夹边”）的长度乘积之比！这就像比较两块相同口味的披萨，面积比就等于它们相邻两边长度相乘的比值。这个模型画出来，尖尖的角像鸟嘴，所以叫“鸟头模型”。

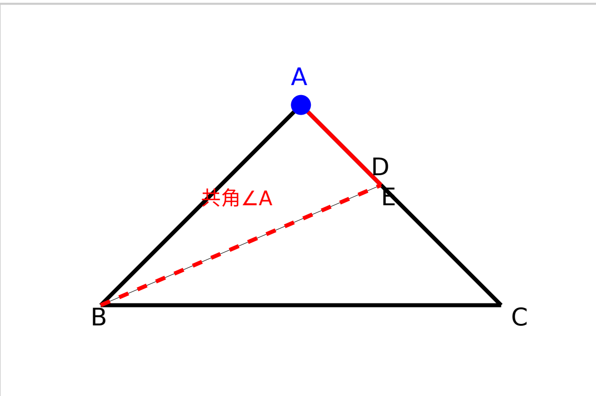
计算秘籍：

在图形中找到共享一个角（顶点）的两个三角形。

分别找出这两个三角形中，组成这个共享角的两条边（夹边）。

如果小鸟头的两条夹边是 $\frac{AD}{AB}=\frac{2}{5}$ 和 $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$，那么小鸟头 $\triangle ADE$ 与大鸟头 $\triangle ABC$ 的面积比就是：$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AE}{AC}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$。

阿星口诀：共角三角似鸟头，面积比例不用愁；夹边比例乘一起，答案立刻在手里！



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**找错“共角”或找错“对应夹边”。**把不是同一个角（顶点）的两个三角形拿来比，或者把大三角形的一条边和小三角形不共角的一条边当成“夹边”来乘。

☑ 正解：**必须严格对应。**先锁定共享的那个顶点（如点 A），在这个顶点下，小鸟头的两条边是 AD 和 AE，那么大鸟头对应的两条边就一定是 AB 和 AC。分子分母要同属于一个三角形。

❌ 错误2：**直接使用边长而非比例。**看到 $AD=2$，$AB=5$，$AE=3$，$AC=4$，错误地列式为 $\frac{S_{小}}{S_{大}}=\frac{2\times3}{5\times4}$（虽然结果对，但逻辑不保险），一旦数字不是实际边长而是比例就容易错。

☑ 正解：**坚持“占比”思维。**永远先写出每条边相对于所在三角形的“占比”，即 $\frac{AD}{AB}$ 和 $\frac{AE}{AC}$，再相乘。这能帮你理清对应关系，尤其在处理分数比、倍数关系时万无一失。

🔥 例题精讲

例题1：如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 AB、AC 上，且 $AD=2cm$，$DB=3cm$，$AE=3cm$，$EC=6cm$。求 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比。

解析：

找共角：两个三角形共享 $\angle A$。

找夹边比例：对于 $\triangle ADE$，夹边是 AD 和 AE。

对于 $\triangle ABC$，夹边是 AB 和 AC。

$AB=AD+DB=2+3=5$ cm。

$AC=AE+EC=3+6=9$ cm。

应用公式：

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AB}\times\frac{AE}{AC}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

☑ **总结：**先求和确定大三角形的边长，再严格按对应夹边的比例相乘。

例题2：在 $\triangle PQR$ 中，S 在 PQ 上使得 $PS:SQ=1:2$，T 在 PR 上使得 $PT:TR=3:4$。求 $\triangle PST$ 与四边形 $SQRT$ 的面积比。

解析：

目标：求 $S_{\triangle PST}:S_{四边形SQRT}$。关键在于求 $S_{\triangle PST}:S_{\triangle PQR}$。

找共角：$\triangle PST$ 与 $\triangle PQR$ 共享 $\angle P$。

找夹边比例：

$\frac{PS}{PQ}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

$\frac{PT}{PR}=\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$

应用鸟头模型：

$$\frac{S_{\triangle PST}}{S_{\triangle PQR}}=\frac{PS}{PQ}\times\frac{PT}{PR}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$

求四边形占比：

因为 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle PST}+S_{\text{四边形}SQRT}$

所以 $S_{\text{四边形}SQRT}=S_{\triangle PQR}-S_{\triangle PST}=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}S_{\triangle PQR}$

故 $\frac{S_{\triangle PST}}{S_{\text{四边形}SQRT}}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{6}{7}}=\frac{1}{6}$

✅ **总结：**鸟头模型常用来求部分与整体的面积比。求部分与另一部分的比时，先分别求出它们与整体的关系。

例题3：已知 $\triangle XYZ$ 的面积为 120 平方厘米。点 M 在 XY 上，点 N 在 XZ 上。若 $XM=\frac{2}{5}XY$，且 $S_{\triangle XMN}=24$ 平方厘米，求 XN 的长度是 XZ 的几分之几?

📌 **解析：**

已知共角：$\triangle XMN$ 与 $\triangle XYZ$ 共享 $\angle X$。

已知面积比：$\frac{S_{\triangle XMN}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

已知一边比例：$\frac{XM}{XY}=\frac{2}{5}$

设未知比例：设 $\frac{XN}{XZ}=k$。

代入鸟头模型公式：

$$\frac{S_{\triangle XMN}}{S_{\triangle XYZ}}=\frac{XM}{XY}\times\frac{XN}{XZ}$$

$$\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\times k$$

$$k=\frac{1}{5}\div\frac{2}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$

所以，XN 的长度是 XZ 的 $\frac{1}{2}$。

☑️ **总结：**鸟头公式是方程，知三可求一。当已知面积比和一边比例时，可以反求另一边的比例。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

$\triangle ABC$ 中，D 在 AB 上，E 在 AC 上。若 $AD=\frac{1}{3}AB$，$AE=\frac{1}{4}AC$，求 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}$ 。

已知 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{6}$，且 $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}$，求 $\frac{AN}{AC}$。

在 $\triangle PQR$ 中，S、T 分别在 PQ、PR 上，$PS=SQ$，$PT=2TR$。求 $S_{\triangle PST}:S_{\triangle PQR}$。

如示意图，$BD=\frac{1}{3}BC$，$CE=\frac{1}{4}CA$，$AF=\frac{1}{5}AB$，求 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}$。（提示：多次使用鸟头模型）

$\triangle XYZ$ 面积为 90，M 为 XY 中点，N 在 XZ 上且 $XN:NZ=1:2$，求 $S_{\triangle XMN}$。

判断题：若 D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 边中点，则 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$。

$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACD}}=?$ (已知 $AB=3, AC=5, AE=4, AD=6$，且 $\angle A$ 为公共角)。

在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在 AD 上，$AE:ED=2:3$，连接 BE、CE，求 $S_{\triangle ABE}:S_{\triangle BEC}:S_{\triangle ECD}$ 的比值。

已知 $S_{\triangle ABC}=80$，D 在 AB 上，$BD=2AD$，E 在 AC 上，且 $S_{\triangle ADE}=10$，求 $\frac{AE}{EC}$。

如图，$AD:DB=1:2$，$BE:EC=2:1$，$CF:FA=1:1$，求 $S_{\triangle DEF}:S_{\triangle ABC}$。

二、奥数挑战

（华罗庚金杯赛）在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别在 BC、CA、AB 上，且 $BD:DC=1:2$，$CE:EA=2:3$，$AF:FB=3:1$。若 $\triangle ABC$ 的面积为 1，求 $\triangle DEF$ 的面积。

（迎春杯）四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，$S_{\triangle AOB}=4$，$S_{\triangle BOC}=9$，$S_{\triangle COD}=6$。已知 $AE:EC=2:1$（E在AC上），求 $S_{\triangle DOE}$。

（希望杯）在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上，且 $BD=2DC$，$CE=2EA$，$AF=2FB$。已知阴影部分面积为 25 平方厘米，求 $\triangle ABC$ 的面积。

$\triangle ABC$ 被其内一点 P 与三个顶点的连线分成三块，面积分别为 3、4、5。过 P 点作三条边的平行线，这些平行线与原三角形三边相交构成三个小三角形，求这三个小三角形的面积和。

在梯形 $ABCD$（$AD \parallel BC$）中，对角线交于 O 点。已知 $S_{\triangle AOD} = 9$，$S_{\triangle BOC} = 16$，$AD : BC = 3 : 4$。点 E 在 BD 上，且 $BE : ED = 1 : 2$，求 $S_{\triangle COE}$。

第三关：生活应用（5道）

（AI图像分割） AI工程师训练模型分割一块三角形蛋糕图片。模型先在一条边上预测了一个点，将其与对角相连，将大三角形分成两部分。已知模型预测的分割点将这条边分成了 $3 : 7$ 的比例，而预测出的小块面积是 150 像素。请问整个蛋糕图片的三角形区域总面积是多少像素？

（航天轨道） 在模拟卫星覆盖范围的二维地图上，一个地面控制站 A 与两颗卫星 B、C 构成一个理想的三角形区域 ABC，代表有效监控区。一颗小行星 D 运行到线段 AB 上，其位置使得 $AD : DB = 1 : 4$，并与卫星 C 形成一条新的预警边界线 DC。如果小行星预警区（$\triangle ADC$）的面积是 500 万平方公里，那么原监控区 $\triangle ABC$ 的面积是多少？

（网购物流） 一个快递仓库的平面图呈四边形。为优化分拣，仓库经理用一条对角线将其分成两个三角形货区A和B。货区A又被一条从分拣中心引出的线分割，用于存放急需件。已知急需件区占货区A面积的 $\frac{1}{5}$，且分割线将货区A在底边上的长度分成了 $2 : 3$ 两段。请问分割线的另一端，将对角线分成了怎样的比例？

（游戏设计） 你正在设计一款塔防游戏。一个敌人从基地（点 B）出发，沿直线走向城堡（点 C）。在路径的 $\frac{2}{5}$ 处（点 D），它受到我方炮塔（点 A）的一次范围攻击，攻击范围是扇形 $\angle A$。如果这次攻击对敌人造成了基础伤害，而走到 $\frac{4}{5}$ 处（点 E）的敌人会进入第二座炮塔的相同攻击范围（同 $\angle A$）。请问，敌人在 D 点受到的单次伤害值，与它若走到 E 点将受到的单次伤害值之比是多少？（假设伤害值与所受攻击的三角形区域面积成正比）。

（数据可视化） 为了展示公司三个部门（A, B, C）的业绩占比，你绘制了一个三角形图表 ABC。部门 A 的业绩由点 D 在边 AB 上的位置表示（$AD : DB =$ 业绩比），部门 C 的业绩由点 E 在边 AC 上的位置表示（$AE : EC =$ 业绩比）。连接 DE 后，$\triangle ADE$ 的面积代表了 A 部门的“综合影响力”。如果已知 A 部门业绩占比为 30%，C 部门业绩占比为 40%，且公司整体“影响力基值”为三角形 ABC 面积 100，请问 A 部门的“综合影响力”得分是多少？

🤔 常见疑问 FAQ

专家问答：鸟头模型：基本公式 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：觉得难，通常有两个原因。第一是**模型识别困难**：图形稍作旋转或嵌套在其他图形中，学生就找不到“共角的鸟头”了。这需要培养一双“慧眼”，核心是找**两个三角形共享的顶点**。第二是**比例对应关系混淆**：鸟头模型的核心公式 $\frac{S_{小}}{S_{大}} = \frac{l_1}{L_1} \times \frac{l_2}{L_2}$ 要求学生严格保持“分子分母分别属于小三角形和大三角形”的对应关系。任何错配都会导致错误。这其实是一种严谨的代数思维训练。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大，它是**比例思想**和**面积法**的基石之一。1) **为相似三角形打下伏笔**：鸟头模型其实是“共角相似三角形”面积比 k^2 的推广（当 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = k$ 时）。2) **连接定比分点公式**：在解析几何中，已知三角形顶点坐标，求边上定比分点构成的三角形面积，其本质就是鸟头模型。3) **解决复杂几何问题的利器**：在求不规则图形面积时，通过构造共角三角形，可以将未知面积比转化为已知的线段比，是“化未知为已知”的关键转换策略。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有，可以总结为“**共角-夹边-乘积**”三步法。无论题目多复杂，按此流程思考：

锁定共角：找到需要比较面积的两个三角形，确认它们是否共享一个角。如果题目没直接给出，试着连接辅助线构造出来。

标出夹边：在共角的顶点处，分别标出两个三角形各自的两条边。用相同符号标记比例关系，例如小三角形的边标为 $\frac{m}{m+n}$，大三角形的对应边就是 1。

相乘求比：毫不犹豫地写下公式：$\frac{S_{小}}{S_{大}} = (夹边1之比) \times (夹边2之比)$，然后计算。

记住这个流程，并辅以大量练习形成条件反射，你就能攻克大部分相关题目。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\frac{PS}{PQ} = \frac{1}{2}$，$\frac{PT}{PR} = \frac{2}{3}$，比为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

提示：连接 AE。$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{20} S$。同理求其他部分，最终 $S_{\triangle DEF} = \frac{13}{30} S$，比值 $\frac{13}{30}$。（过程略）

$\frac{XM}{XY} = \frac{1}{2}$，$\frac{XN}{XZ} = \frac{1}{3}$，$S_{\triangle XMN} = 90 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = 15$

错。应为 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$。

$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACD}} = (\frac{AB}{AC} \times \frac{AE}{AD}) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$。（注意：共角均为 $\angle A$）

提示：以 AB 为底，高相同，$S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ABD} = AE : AD = 2 : 5$。又 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{平行四边形}$。最终比为 $2:5:3$。（过程略）

$\frac{BD}{AB} = \frac{2}{3}$，则 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$。设 $\frac{AE}{AC} = k$。$\frac{10}{80} = \frac{1}{3} \times k$，$k = \frac{3}{8}$。所以 $AE : EC = 3 : 5$。

提示：分别求出三个顶点处的小三角形占大三角形的比例，再用 1 减去它们之和。最终答案为 $\frac{5}{12}$。（过程略）

二、奥数挑战

分别用三次鸟头模型求 $S_{\triangle ADF}$、$S_{\triangle BDE}$、$S_{\triangle CEF}$，再用大三角形面积减。答案为 $\frac{7}{20}$。

利用等高模型和鸟头模型。先由给定面积比求出 $AO : OC = 2 : 3$。在 $\triangle ACD$ 中，对共角 $\angle O$ 使用鸟头模型求 $S_{\triangle DOE}$。答案为 2。

关键：阴影部分是三个应用鸟头模型后剩下的小三角形。设 $S_{\triangle ABC} = S$，则 $S_{\triangle ADF} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} S$，... 最后列方程解得 $S = 108$ 平方厘米。

此题需要利用平行线带来的相似和鸟头模型。答案为 12。（过程复杂，略）

由梯形蝴蝶定理知 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = 12$。在 $\triangle BCD$ 中对共角 $\angle BDC$ 使用鸟头模型求 $S_{\triangle COE}$。答案为 $\frac{32}{9}$。

第三关：生活应用

设总面积为 S，则 $150 = \frac{3}{10} \times S$（注意：$3:7$ 是分割，其中一块占比 $\frac{3}{10}$）。解得 $S = 500$ 像素。

监控区面积 $S = 500 \div (\frac{1}{5} \times 1) = 2500$ 万平方公里。（假设 AC 边未被分割，即 $\frac{AN}{AC} = 1$）

设对角线被分成的比例为 $m : n$。由鸟头模型：$\frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{m}{m+n}$，解得 $m : n = 1 : 1$。即平分了对角线。

伤害比即为面积比：$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{BD}{BE} \times \frac{BA}{BA} = \frac{\frac{2}{5} BC}{\frac{4}{5} BC} = \frac{1}{2}$。（共角 $\angle B$）

影响力得分 $= 100 \times \frac{3}{10} \times \frac{4}{10} = 100 \times 0.12 = 12$ 分。（注意：C部门业绩占比 40% 决定了 $AE : AC = 0.4$，但 $\triangle ADE$ 中用到的是 $\frac{AE}{AC} = 0.4$）

更多精彩内容请访问 **星火网 www.xinghuo.tv**

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-几何-矩形一半模型

12-19

奥数-几何-一半模型基础

12-19

奥数-几何-等积变形

12-19

奥数-几何-割补法求面积

12-19

奥数-计算-循环小数化分数

12-19

奥数-计算-完全平方数特征

12-19