奥数-几何-立体切分表面积

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：立体几何：表面积切分 原理

核心概念：想象一下，你有一个完整的土豆（一个几何体），它的表皮面积就是它的表面积。现在，你拿起刀“咔嚓”切下去！这一刀下去，土豆痛不痛？阿星说：痛！因为这一刀，土豆被劈开，露出了两个全新的“伤口面”——这就是增加的表面积。反过来说，如果你把切开的两半土豆再拼回去（用超级胶水！），那两个“伤口面”就紧紧地贴在一起，看不见了，表面积就又减少了。所以记住阿星的灵魂比喻：**切一刀，多两个面；拼一下，少两个面。** 无论你怎么切，只要是完全切开，就一定会多出两个切面的面积。

计算秘籍：

第一步：计算原立体图形的表面积 $S_{原}$。

第二步：观察“切这一刀”产生了哪两个新的截面。计算**一个**截面的面积 $S_{切面}$。

第三步：应用阿星定理。切一刀后增加的总面积是 $2 \times S_{切面}$。

第四步：得到切分后的总表面积：$S_{新} = S_{原} + 2 \times S_{切面}$。

阿星口诀：

切一刀，多两面，面积增加看得见。
拼回去，少两面，总面积又回从前。

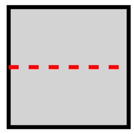
⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**认为切面形状都一样。** → ✅ 正解：**切面的形状和大小由切割的路径和方向决定。** 平行于底面切和斜着切，得到的切面形状完全不同，必须具体问题具体分析。

❌ 错误2：**计算时漏掉或重复计算原表面的损失。** → ✅ 正解：**切割不会让原有的外表面消失！** 我们的核心原理是“增加两个新面”，原有的所有外表面都还在（除了被刀锋划过的那条线）。所以直接用 $S_{原} + 2 \times S_{切面}$ 最保险。

🔥 例题精讲

例题1： 一个棱长为 6 cm 的正方体，沿着与底面平行的方向，从高的中点将它切成两个长方体。求切开后两个立体图形的表面积之和比原正方体增加了多少平方厘米？



🔨 **解析：**

原正方体表面积：$S_{原} = 6 \times (6 \times 6) = 216\,\mathrm{cm}^2$。

这一刀平行于底面，切面是一个正方形，边长等于正方体棱长 6 cm。所以一个切面面积 $S_{切面} = 6 \times 6 = 36\,\mathrm{cm}^2$。

根据“切一刀多两面”，增加的面积就是 $2 \times S_{切面} = 2 \times 36 = 72\,\mathrm{cm}^2$。

✅ **总结：** 抓住“切面是什么形状”，平行于哪个面切，切面就和那个面形状相同。

例题2： 一个底面半径是 4 cm，高是 10 cm 的圆柱，沿着底面直径竖直剖成完全相同的两半。求其中一半立体图形的表面积。（π 取 3.14）

🔨 **解析：**

原圆柱表面积：$S_{原} = 2 \times \pi r^2 + 2\pi rh = 2 \times 3.14 \times 4^2 + 2 \times 3.14 \times 4 \times 10 = 351.68\,\mathrm{cm}^2$。

这一刀沿直径竖直切下，切面是一个长方形。这个长方形的高是圆柱高 10 cm，宽是圆柱底面直径 $2 \times 4 = 8$ cm。所以一个切面面积 $S_{切面} = 10 \times 8 = 80\,\mathrm{cm}^2$。

切一刀后，总表面积变为 $S_{新总} = S_{原} + 2 \times S_{切面} = 351.68 + 160 = 511.68\,\mathrm{cm}^2$。

题目问的是**其中一半**的表面积。它由哪些部分组成？

原圆柱表面的一半：$\frac{1}{2}S_{\text{原}}=175.84\,\text{cm}^2$？**不对！** 这样算会漏掉新出现的切面，并且对原表面的分配也不准。

正确思路：一半的表面积 = （原圆柱表面积的一半）+（一个切面面积）+（新出现的长方形剖面）。

原圆柱表面被平分：上下底各剩一个半圆，合起来是一个整圆面积：$\pi r^2=3.14\times16=50.24\,\text{cm}^2$。

侧面（曲面）被平分：原侧面积的一半为 $\frac{1}{2}\times2\pi rh=\pi rh=3.14\times4\times10=125.6\,\text{cm}^2$。

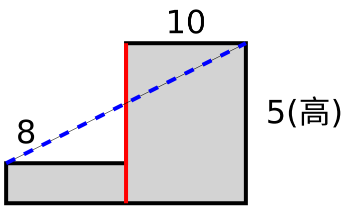
新增的那个切面（长方形）：$80\,\text{cm}^2$。

所以，一半的表面积 $=50.24+125.6+80=255.84\,\text{cm}^2$。

快速验证：总新表面积 $511.68\,\text{cm}^2$ 的一半正好是 $255.84\,\text{cm}^2$，与我们的计算一致。

☑ **总结：**求“一部分”的表面积时，要像解剖一样，清点它拥有的每一个面的面积，特别是新增的切面。

例题3：一个长、宽、高分别为 10 cm、8 cm、5 cm 的长方体，按下图所示（从一条棱到对棱）切一刀，得到一个三棱柱和一个五棱柱。已知切面是一个矩形，求切开后两个立体图形的表面积之和。



📌 **解析：**

原长方体表面积：$S_{\text{原}}=2\times(10\times8+10\times5+8\times5)=2\times(80+50+40)=340\,\text{cm}^2$。

关键在于确定**切面形状**。题目说“从一条棱到对棱”，且切面是矩形。观察图形，这一刀产生的切面，其**长**就是长方体的高 5 cm，其**宽**是长方体顶面对角线的长度，根据勾股定理，对角线长 $\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$ cm。所以一个切面面积 $S_{\text{切面}}=5\times2\sqrt{41}=10\sqrt{41}\,\text{cm}^2$。

切一刀后，总面积增加 $2\times10\sqrt{41}=20\sqrt{41}\,\text{cm}^2$。

切开后两个立体图形的表面积之和为：$S_{\text{新总}}=S_{\text{原}}+20\sqrt{41}=340+20\sqrt{41}\,\text{cm}^2$。

☑ **总结：**对于非标准切割，核心是冷静分析“切面”的形状，找出它的边长并计算面积。勾股定理是此类问题的好帮手。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

把一个棱长 5 cm 的正方体切成两个长方体，表面积增加了多少?

一个长 12 dm，宽 6 dm，高 4 dm 的长方体，竖着（平行于侧面）切一刀分成两半，表面积最多增加多少？最少增加多少?

一个圆柱底面直径 10 cm，高 20 cm，平行于底面切成两个小圆柱，表面积增加了多少 cm^2?

把两个完全一样的正方体拼成一个长方体，表面积减少了 $32\ \mathrm{cm}^2$。原来每个正方体的表面积是多少?

一个圆锥从顶点竖直向下切成完全相同的两半，切面是什么形状?

把一根长 2 米的圆柱形木头锯成 4 段小圆柱，表面积增加了 180 平方厘米。这根木头的底面积是多少?

一个长方体，切两刀（平行于同一个面）分成三个长方体，表面积比原来增加了 $100\ \mathrm{cm}^2$。已知原长方体该面的面积是 $25\ \mathrm{cm}^2$，求原长方体表面积。

判断题：把一个球切成两半，表面积增加的部分正好等于一个“大圆”的面积。( )

把一个体积为 $27\ \mathrm{cm}^3$ 的正方体切成两个长方体，这两个长方体表面积之和是多少?

把 3 个棱长 2 cm 的正方体拼成一个长方体，这个长方体的表面积比原来 3 个正方体的表面积之和减少了多少?

二、奥数挑战

一个棱长为 6 cm 的正方体，在它的一个面的正中心挖去一个棱长为 2 cm 的小正方体（洞打穿）。求剩下立体图形的表面积。

一个长方体，如果高增加 2 cm，就变成一个正方体，这时表面积比原来增加 $56\ \mathrm{cm}^2$。原长方体的体积是多少?

有一个棱长为 10 cm 的正方体木块，从它的上面、前面、左面的正中心各挖一个边长为 4 cm 的正方形通孔。求剩余部分的表面积。

一个圆柱，高减少 2 cm，表面积就减少 $25.12\ \mathrm{cm}^2$。这个圆柱的底面积是多少？（π 取 3.14）

将一个表面涂色的正方体（棱长 n 厘米）切成棱长 1 cm 的小正方体，三面涂色、两面涂色、一面涂色的小正方体各有多少个？（用含 n 的式子表示）

一个长方体，不同的三个面的面积分别是 $35\ \mathrm{cm}^2$、$21\ \mathrm{cm}^2$、$15\ \mathrm{cm}^2$，且它的长、宽、高都是整数（cm）。如果把它切成两个完全相同的小长方体，表面积最多能增加多少？

一个底面是正方形的长方体，所有棱长之和是 100 cm，高是 7 cm。把它切成两个长方体后，表面积最多增加多少？

一个直角梯形（上底 4，下底 8，高 4 ）绕着它的一条腰旋转一周得到一个立体图形。将这个立体图形从旋转轴的中点水平切开，求上半部分的表面积。

一个正方体容器棱长 10 cm，里面装有 8 cm 深的水。现在将一个棱长 4 cm 的正方体铁块放入水中，完全浸没。然后将这个容器沿着水面所在的平面横切一刀（切面平行于底面），求切开后下面部分容器内壁的总表面积（含与水接触的底面和侧面）。

一个组合体由底面半径相同的圆锥和圆柱上下拼接而成。从该组合体的正上方竖直切下一刀（过圆锥顶点和底面圆心），切面是一个等腰三角形。已知圆锥母线长 10 cm，圆柱高 12 cm，整个组合体高 20 cm。求这一刀产生的两个切面的面积之和。

第三关：生活应用（5道）

（AI芯片冷却） 某AI服务器的CPU芯片是一个长宽高为 3 cm × 3 cm × 0.5 cm 的扁平长方体。为了安装散热片，需要在芯片顶部中央铣出一个长 2 cm，宽 0.5 cm，深 0.2 cm的凹槽。铣完后，这个芯片的表面积增加了多少？（假设凹槽底面和侧面光滑）

（航天材料） 一种用于火星探测器的蜂窝状复合材料，其单元结构可看作一个棱长为 a 的正六棱柱。为了减轻重量，工程师沿平行于底面的方向，在距底面 $\frac{1}{3}a$ 和 $\frac{2}{3}a$ 的高度各切一刀，挖去中间部分，形成一个“工”字形的空心柱体。求挖去后，这个单元结构的内外总表面积。

（网购包装） 电商用一张 80 cm × 60 cm 的长方形纸板来制作一个无盖长方体包装盒，需要在四个角各剪去一个正方形，再将四边折起。设剪去的正方形边长为 x cm。当盒子容积最大时，这个盒子的表面积是多少？它比原始纸板面积减少了多少？

（3D打印） 用3D打印技术制作一个中空的、壁厚均匀为 2 mm 的立方体容器（外棱长 10 cm）。打印软件在计算耗材时，需要知道模型的外表面积和内表面积之和。请你帮工程师计算这

个值。

（地质勘探） 勘探队在地下 100 m 处发现一个近似球体的矿藏，半径为 50 m。计划从地面垂直向下钻一个圆柱形通道直达球心，以便取样和运输。通道的半径为 5 m。钻通后，这个矿藏（球体）露在外部的表面积（包括通道内壁）是多少平方米？

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：立体几何：表面积切分 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难在**空间想象**和**信息转化**。学生需要在大脑中“模拟”切割过程，并把抽象的“切面”具体化成一个可计算的平面图形。这涉及两步跨越：1. 从三维立体到二维截面形状的识别；2. 从截面形状到其边长数据的提取。很多题目不会直接给出切面尺寸，需要学生通过勾股定理、相似、比例等知识间接求出。阿星的“切一刀，多两面”是思维的定海神针，帮你锁定核心变化，避免被复杂的图形绕晕。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是培养**空间思维**和**化归思想**的绝佳训练场。在高中立体几何、解析几何，乃至大学的微积分（特别是重积分和曲面面积计算）、工程制图、计算机图形学中，你都会反复遇到“截面”这一核心概念。例如，计算一个不规则立体的体积，微积分的思想就是把它“切”成无数个薄片。这里的“切一刀”是离散的、宏观的，而微积分中的“切”是连续的、微观的，但核心思想一脉相承。公式 $S_{新} = S_{原} + 2S_{切面}$ 就是最简单的“整体+变化=新整体”的模型。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！牢记并执行这个**三步法**：

定原形：先不管怎么切，算出原立体图形的表面积 $S_{原}$。

找切面：这是最关键的一步！在图上或脑海中，明确“切这一刀”新产生的那个平面是什么形状？是矩形？三角形？还是其他？然后想办法（用已知边长、勾股定理等）求出**一个**这样的切面的面积 $S_{切面}$。

用公式： 直接代入 $S_{\text{总新}} = S_{\text{原}} + 2 \times S_{\text{切面}}$。如果问题是求其中一部分，就在此基础上，仔细清点这一部分拥有哪些“面片”(尤其注意它拥有几个新增切面)，进行加加减减。

这个套路能解决90%的常规问题。剩下10%的难题，难点也只在第2步“找切面”需要更巧妙的几何构造。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$2 \times (5 \times 5) = 50\,\text{cm}^2$。切面是边长为 5 cm的正方形。
最多：竖着切，切面平行于 12×4 的面，增加 $2 \times (12 \times 4) = 96\,\text{dm}^2$。最少：竖着切，切面平行于 6×4 的面，增加 $2 \times (6 \times 4) = 48\,\text{dm}^2$。
增加两个底面积：$2 \times \pi \times (10/2)^2 = 50\pi \approx 157\,\text{cm}^2$。
拼一次少 2 个面，每个面面积 $32 \div 2 = 16\,\text{cm}^2$。正方体表面积 $6 \times 16 = 96\,\text{cm}^2$。
等腰三角形。
锯成 4 段需锯 3 刀，增加 6 个底面积。底面积 $= 180 \div 6 = 30\,\text{cm}^2$。
切两刀（平行同面）增加 4 个该面面积。已知一个面面积为 $25\,\text{cm}^2$，所以增加 $4 \times 25 = 100\,\text{cm}^2$（与题目一致）。原长方体表面积 $= 2 \times (25 + \frac{35}{?} + \frac{21}{?})$。**解析：** 已知三个不同面面积分别为 $ab = 35, bc = 21, ca = 15$。三式相乘得 $(abc)^2 = 35 \times 21 \times 15$，可求 abc，进而求 a, b, c。但本题可直接求表面积：$S = 2(ab + bc + ca) = 2 \times (35 + 21 + 15) = 142\,\text{cm}^2$。
错误。增加的部分是两个“大圆”的面积。
正方体棱长 3 cm。原表面积 $54\,\text{cm}^2$。切一刀后总和 $54 + 2 \times (3 \times 3) = 72\,\text{cm}^2$。
拼一次少 2 个面。3 个拼一起，拼 2 次，少 4 个面。每个面面积 $4\,\text{cm}^2$，共减少 $16\,\text{cm}^2$。
（*第二关、第三关及详细解析因篇幅所限，在此列出核心思路。建议学生独立思考后，可向老师或阿星提问。）

更多练习题

奥数-几何-三视图还原

12-19

奥数-几何-圆中方面积

12-19

奥数-几何-方中圆面积

12-19

奥数-几何-容斥求面积

12-19

奥数-几何-毕克定理

12-19

奥数-几何-沙漏模型

12-19