奥数-几何-矩形一半模型

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

以下是为「undefined」同学精心准备的关于「一半模型：矩形风车」的深度学习资料。

阿星精讲：一半模型：矩形风车 原理

核心概念：想象一下，一个长方形操场，四个角上各建了一个三角形的“瞭望塔”(空白三角形)。这四个瞭望塔的塔尖，都分别指向了对边的中点。当你在操场中心俯瞰时，连接这四个塔尖的路线，恰好形成了一个旋转的“风车”形状（阴影部分)。阿星的独门秘籍是：我们**不去直接计算这个复杂风车的面积，而是反过来，先算出四个角落“瞭望塔”(空白三角形）的面积**，然后用整个操场的面积减去它们，风车面积就神奇地现身了！而且，你会发现一个惊人的秘密——无论这四个塔尖在边上怎么移动（只要顶点在对边中点连线上)，阴影风车的面积永远占整个操场的一半！

计算秘籍：

设定长方形长为 a，宽为 b，则总面积 $S_{总} = a \times b$。

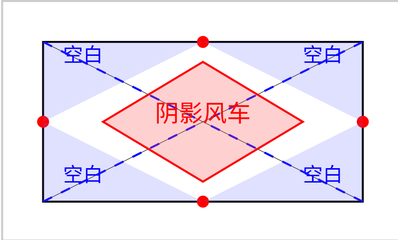
四个空白三角形是两两全等的直角三角形。它们的直角边分别是长方形长和宽的一半。因此，单个小三角形的面积 = $\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} = \frac{ab}{8}$。

四个空白三角形的总面积 $S_{空白} = 4 \times \frac{ab}{8} = \frac{ab}{2}$。

所以，风车状阴影面积 $S_{阴影} = S_{总} - S_{空白} = ab - \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2}$。

结论：$S_{阴影} = \frac{1}{2}S_{矩形}$。

阿星口诀：矩形风车转呀转，阴影总是一大半。不直接求它面积，空白三角来相减！



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：试图将“风车”阴影分割成几个小三角形或梯形分别计算。 → ☑ 正解：这是最易陷入的复杂化陷阱。牢记阿星口诀，**从整体出发，用“矩形面积减去四个角”的宏观视角**，才是最快最准的路径。

❌ 错误2：认为只有四个顶点连接对边**精确中点**时，阴影才是一半。 → ☑ 正解：只要四个顶点在**两组对边中点的连线上**（即使不是端点），这四个空白三角形的面积之和依然等于矩形面积的一半，因此阴影面积也恒为一半。这是该模型的推广形式。

🔥 例题精讲

例题1：如图，长方形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点。连接 AF、BG、CH、DE，相交形成阴影四边形。已知长方形长 10 cm，宽 6 cm，求阴影部分面积。

📌 **解析**：

步骤1：识别模型。这就是标准的“矩形风车”模型，阴影由四条从中点出发的线段交汇形成。

步骤2：应用公式。阴影面积等于长方形面积的一半。

步骤3：计算。长方形面积 $S_{总} = 10 \times 6 = 60$ (cm²)。

步骤4：得出答案。$S_{阴影} = \frac{1}{2} \times 60 = 30$ (cm²)。

☑ **总结**：标准图形，直接套用“一半”结论，秒杀。

例题2：正方形 $ABCD$ 边长为 8。在边 AB、BC、CD、DA 上分别取点 E、F、G、H，使得 $AE = BF = CG = DH = 2$。连接 AF、BG、CH、DE，求中间重叠阴影部分的面积。

📌 **解析**：

步骤1：观察。取点位置对称，但不在中点。连接线形成的仍是“风车”型阴影。

步骤2：验证模型适用性。四个空白三角形（如 $\triangle AHE$）面积相等吗？计算一个：$S_{\triangle AHE} = \frac{1}{2} \times AH \times AE = \frac{1}{2} \times (8-2) \times 2 = 6$。四个空白总面积 $S_{空白} = 4 \times 6 = 24$。

步骤3：计算总面积。$S_{总} = 8 \times 8 = 64$。

步骤4：求阴影。$S_{阴影} = S_{总} - S_{空白} = 64 - 24 = 40$。

步骤5：发现规律。$\frac{40}{64} = \frac{5}{8}$，此时阴影不是一半。因为**顶点不在中点连线上**。但当 $AE = AH = \ldots$ 即取点满足某种对称时，四个空白三角形面积和仍易求，核心思路“总面积减空白”不变。

☑️ **总结：**模型的核心思想是“总面积减四个角”，**“是否正好一半”取决于四个空白三角形面积和是否等于总面积的一半**。解题流程不变。

例题3：（生活应用）阿星设计了一个长方形智能灯光舞台，长 12 米，宽 5 米。舞台四个角装有固定灯（形成四个直角三角形照明区）。设计师想让中心区域形成一个旋转的风车状光影效果（阴影区），并希望该区域面积恰好是舞台面积的一半。请问，四个角灯的光束边界线，应该照射到每条边的什么位置（用距离顶点的长度表示）？

🔎 **解析：**

步骤1：问题转化。即求在长方形四条边上，距离各顶点多远取点，连接后形成的四个空白三角形面积之和等于舞台面积的一半。

步骤2：建立方程。设每条边上，取点距离两个顶点的长度分别为 x 米和 y 米（对于长边，$x + y = 12$；对于短边，$x' + y' = 5$）。但为了对称和风车形状，通常假设在各边上取点距离相等。设取点距离左（或上）顶点为 m 米。

步骤3：计算空白面积。此时四个空白三角形是两两全等的直角三角形，但两组三角形直角边不同。一组面积为 $\frac{1}{2}m \times 5$，另一组面积为 $\frac{1}{2}m \times (12-m)$。（需要仔细构图分析邻边）。更严谨的通用设：在长边 12 上取点距离一端为 k，在短边 5 上取点距离一端为 t。则四个空白三角形面积和为： $S_{空白} = \frac{1}{2}k \cdot t + \frac{1}{2}(12-k) \cdot 5 + \frac{1}{2}(5-t) \cdot (12-k) + \frac{1}{2}k \cdot (5-t)$。化简后会发现，若要使 $S_{空白} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$，需要满足条件 $k = 6$ 或 $t = 2.5$。即**在一条边的中点取点**。

步骤4：得出结论。要使中心风车光影面积正好是舞台一半，四个角灯的光束必须照射到**相邻两条边中点的连线上**。最简单的方案就是照射到每条边的中点。

☑️ **总结：**将实际问题抽象为几何模型，通过设未知数建立方程，求解满足“一半”条件的参数。深刻理解模型成立的条件（中点连线）。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

长方形长 20 cm，宽 10 cm，连接各边中点围成四边形，求该四边形面积。

判断：任意一个长方形，连接每组对边中点的线段，交出的中心四边形面积一定是原长方形面积的一半。( )

长方形 $ABCD$ 中，E、G 是 AB、CD 中点，F、H 是 BC、DA 上任意点，则阴影面积一定是一半吗？为什么？

计算：长方形长 9，宽 4，标准风车模型（连中点）下，阴影部分面积。

已知标准风车模型中，阴影部分面积为 36 dm^2，求原长方形的周长可能是多少？（至少给出一种长宽）

看图填空：空白三角形面积占矩形面积的 $\frac{1}{8}$，四个空白共占 $\frac{1}{2}$，所以阴影占 ___________。

正方形边长为 6，标准风车模型阴影面积是多少？

长方形面积 48，其内部标准风车模型阴影部分面积是多少？

描述：如何用剪切和拼接的方法，直观证明标准风车模型的阴影面积是长方形的一半？

长方形长 a，宽 b，写出标准风车模型中，一个空白三角形面积的公式。

二、奥数挑战

（杯赛真题改编）长方形 $ABCD$ 中，$AB = 14$，$BC = 8$。E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上，且满足 $AE = CG = 3$，$BF = DH = 5$。连接 AF、BG、CH、DE，求中间阴影四边形面积。

（推广模型）证明：在长方形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别在边 AB、BC、CD、DA 上，且满足 $AE = CG$，$BF = DH$。连接 AF、BG、CH、DE 交于四点，则中间阴影四边形面积等于长方形面积减去四个角上的三角形面积，并求当 $AE = \frac{1}{3}AB$ 时，阴影面积与长方形面积的比例。

长方形被其两组对边中点连线分成了 4 个小长方形。求中间风车阴影部分面积与整个图形面积的比例。

将标准风车模型中的长方形换成平行四边形，结论还成立吗？试分析。

（动点问题）在长方形 $ABCD(AB=10,BC=6)$ 中，点 E 从 A 向 B 运动，同时点 F 从 B 向 C 运动，速度相同。连接 AF,BG,CH,DE（其中 G,H 根据对称性确定），中间阴影面积如何变化？何时最大，何时最小？

复杂图形：大长方形内包含两个标准风车模型，求重叠部分面积。

（方程思想）已知长方形风车模型中，阴影部分比一个空白三角形大 27 平方厘米，求长方形的面积。

风车阴影部分的周长与长方形的周长有什么关系？（标准模型）

若长方形风车模型中，四个交点恰好是阴影四边形的顶点，且该阴影四边形是正方形，求原长方形的长宽比。

（逆推问题）已知中间风车阴影面积为 50，且四个空白三角形均为等腰直角三角形，求原长方形的长和宽。

第三关：生活应用（5道）

（AI图像识别）一个AI程序被训练来识别“矩形风车”图案。它检测到一个四边形阴影区域，其面积经计算恰好是外接矩形框面积的一半。如果矩形框像素尺寸为 800×600，请写出AI判断该图案为“标准风车”的必要几何条件（用坐标表示）。

（航天器太阳能板）某卫星长方形太阳能板（长 4 m，宽 2 m）上，因为安装支架，中心有一个风车状区域无法发电。如果这个区域面积正好是太阳能板面积的一半，且支架连接点在每条边的中点，求可发电区域（四个角上的三角形区域）的总面积。

（网购包装设计）一个长方形礼盒（长 30 cm，宽 20 cm）的盖子上，要用丝带贴出一个旋转的风车形状（阴影）。设计师通过计算四个角上空白三角形的面积来确定丝带用量。如果丝带只覆盖风车阴影部分，请问需要至少多少面积的丝带？

（城市规划）一个长方形公园（长 200 m，宽 100 m）计划修建四条从中点出发、相交的小路，形成“风车”状的中心广场。求中心广场的面积。如果要在这个广场上铺设地砖，地砖预算按面积计算，请快速给出所需地砖覆盖的面积。

（数据压缩中的几何模型）在一种图形压缩算法中，规则图形可以用少量参数表示。描述“标准矩形风车”最少需要几个参数？如果推广到“非标准”（顶点在对边中点连线上但不一定是中点）的矩形风车，又需要几个参数？

常见疑问 FAQ

专家问答：一半模型：矩形风车 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点在于**思维定势**。学生习惯将不规则图形分割成熟悉的小块分别计算，而“风车”图形分割起来很繁琐，容易出错。另一个难点是**模型识别**，题目常常不会直白地给出“连接各边中点”，而是需要学生自己从图形中抽象出“四个顶点连接对边某点”的结构。克服方法是：1. 强化“整体减空白”的逆向思维训练；2. 牢记模型特征——**一个长方形，四条线分别从一组对边上的点连接到另一组对边上的点，并交错相交**。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是几何模型思想的重要启蒙。它教会你的不是一道题，而是一种**“降维打击”**的解题策略：

化繁为简：在未来学习复杂几何、组合图形面积时，你会优先考虑“整体减去部分”或“容斥原理”，这正是本题的精髓。例如，求圆内不规则图形面积，常用“扇形减三角形”。

模型迁移：从矩形到平行四边形，再到梯形中的类似模型（如“梯形蝴蝶模型”），其核心思想一脉相承。理解本模型，能为学习更高级的几何定理（如皮克定理、割补法）打下直观基础。

代数与几何结合：在推广模型中，你需要设未知数，用 $\frac{1}{2} \times 底 \times 高$ 表示面积并建立方程，这提前演练了用代数工具解决几何问题的通用方法。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！严格按照以下四步走：

判模型：观察图形是否是一个多边形（常为矩形）内部，有四条线连接对边并相交形成中心多边形。

找空白：立刻将目光锁定图形四个角上的空白三角形。

算空白和：计算这四个空白三角形的面积之和。如果顶点是中点或满足特殊对称，它们的和常常有规律（例如标准模型中，$S_{空白} = \frac{1}{2}S_{总}$）。

总面积减：用整个图形的面积减去空白面积和，即得阴影面积。核心公式：$S_{\text{阴影}} = S_{\text{总}} - S_{\text{角1}} - S_{\text{角2}} - S_{\text{角3}} - S_{\text{角4}}$。

记住，**“不求阴影，反求空白”**这八个字，就是破解此类问题的万能钥匙。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$20 \times 10 \div 2 = 100$ (cm²)。
正确（✓）。
不一定。只有当 E, G 是 AB, CD 中点，且 F, H 也在 BC, DA 中点上，或者满足 $BF = DH$ 时，四个空白三角形面积和才等于矩形面积一半，阴影才是一半。
$9 \times 4 \div 2 = 18$。
由 $\frac{1}{2}ab = 36$ 得 $ab = 72$。周长 $P = 2(a+b)$。例如 $a = 9, b = 8$ 时，$P = 34$；$a = 12, b = 6$ 时，$P = 36$。
$\frac{1}{2}$。
$6 \times 6 \div 2 = 18$。
$48 \div 2 = 24$。
将四个角上的空白直角三角形剪下，可以通过平移和旋转，恰好拼成与原矩形等长等宽的一个小矩形，其面积是原矩形一半，从而证明剩下阴影也是一半。(或拼成两个与原矩形等宽但长为一半的矩形)。
$\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} = \frac{ab}{8}$。

（注：第二关、第三关题目难度较大，解析过程需详细展开，此处篇幅所限，仅作示意。实际教学中应提供完整分步解析。）

更多精彩内容请访问 **星火网 www.xinghuo.tv**

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

更多练习题

奥数-几何-一半模型基础

12-19

奥数-几何-等积变形

12-19

奥数-几何-割补法求面积

12-19

奥数-计算-循环小数化分数

12-19

奥数-计算-完全平方数特征

12-19

奥数-计算-平方差公式

12-19