奥数-几何-正方体染色

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：立体几何：染色问题 原理

核心概念：想象一下，阿星有一个超大号的正方体面包，它在表面涂满了厚厚的巧克力酱。然后，阿星拿出他的“面包刀”，沿着网格线，把这个大面包均匀地切成了许多小方块。切开后一看，这些小方块的命运可大不相同！**站在八个角上的小方块最贪吃**，它三个面都沾满了巧克力（3面涂色）；**站在每条棱上（但不是角）的小方块**，像排队的同学，只有挨着它的左右两个面沾到了巧克力（2面涂色）；**安静待在每个面中心的小方块**，像个乖宝宝，只露出了一个脸，所以只有一个面有巧克力（1面涂色）；而**完全藏在面包心里的小方块**，则一点巧克力都没沾到，是全新的（0面涂色）。我们的任务，就是搞清楚每种小方块各有多少个。

计算秘籍：

设大正方体每条棱被切成了 n 段，那么小正方体的总数为 n^3 个。

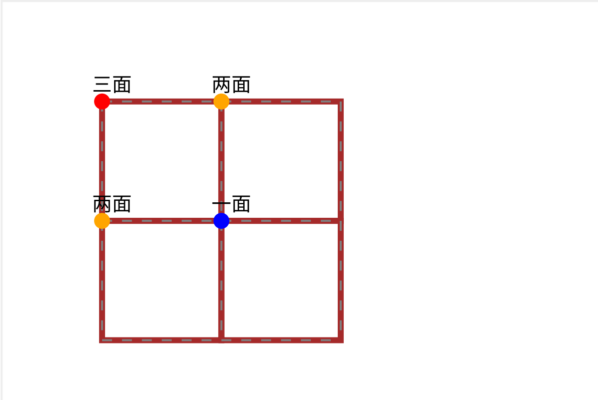
三面涂色（角块）：永远只出现在**8个顶点**上，所以永远是 8 个。

两面涂色（棱块）：出现在**棱上**，但要去掉两端的顶点。每条棱上有 n 个小方块，去掉两端，中间有 $n-2$ 个是两面涂色的。大正方体有 12 条棱，所以总数为 $12 \times (n-2)$ 个。

一面涂色（面心块）：出现在**每个面的中心区域**。每个面上，去掉最外面一圈，中心是一个 $(n-2) \times (n-2)$ 的正方形区域。所以每个面有一面涂色的小方块数是 $(n-2)^2$ 个。大正方体有 6 个面，所以总数为 $6 \times (n-2)^2$ 个。

没有涂色（核心块）：就是**剥掉最外面一层**后，剩下的更小的正方体。它的棱长是 $n-2$，所以总数为 $(n-2)^3$ 个。

阿星口诀：角三棱二面中心，内在乾坤要分清。总数 n^3 要记牢，减二乘来又加去。



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：只算了涂色的，忘了算“没有涂色”的小方块。

→ ☑ 正解：完整的分类是“3面、2面、1面、0面”涂色四种情况。0面涂色（内部核心）的数量是 $(n-2)^3$，非常重要！

❌ 错误2：看到“把棱长平均分成5份”，误以为 $n=5$， 但计算棱块和面块时又直接用 n 去乘。

→ ☑ 正解：明确 n 代表每条棱分成的段数，也等于每条棱上小方块的个数。计算棱块用 $n-2$，计算面心块用 $(n-2)^2$。例如分成5份，则 $n=5$，棱块数 $=12\times(5-2)=36$。

🔥 例题精讲

例题1： 将一个棱长为 10 cm的大正方体表面涂上红色，然后将其锯成棱长为 2 cm的小正方体。那么，一面涂红色的小正方体有多少个？

解析：

先求大正方体每条棱被分成的段数 n。棱长 10 cm，小正方体棱长 2 cm，所以 $n=10\div2=5$（段）。

一面涂色的小方块位于每个面的中心区域，每个面有 $(n-2)^2$ 个。

代入公式计算：一面涂色的总数 $=6\times(5-2)^2=6\times3^2=6\times9=54$（个）。

☑ **总结：** 先根据总棱长和小棱长求出 n，再直接套用“一面涂色”公式。

例题2： 一个表面涂色的大正方体，被切成若干个小正方体。其中两面涂色的小正方体有 36 个。请问，一面涂色的小正方体有多少个？

解析：

设大正方体每条棱被切成 n 段。两面涂色的个数公式为 $12(n-2)$。

根据题意：$12(n-2)=36$， 解得 $n-2=3$， 所以 $n=5$。

一面涂色的个数公式为 $6(n-2)^2$。将 $n-2=3$ 代入，得 $6\times3^2=6\times9=54$（个）。

☑ **总结：**利用一种涂色方块的数量反推 n 或 $(n-2)$，是解决进阶问题的关键。

例题3：将一个棱长为 6 的大正方体切割成棱长为 1 的小正方体，然后将所有至少有一面涂色的小方块表面重新刷上新的油漆。问新刷油漆的总面积是多少？

解析：

确定 $n=6\div1=6$。

计算各类小方块数量：

三面涂色：8 个。

两面涂色：$12\times(6-2)=12\times4=48$ 个。

一面涂色：$6\times(6-2)^2=6\times16=96$ 个。

“至少一面涂色”即以上三类之和：$8+48+96=152$ 个。

每个小正方体棱长为 1，表面积为 $6\times(1^2)=6$。但重新刷漆时，只刷它**暴露在外（即原来被涂色）的那些面**。

三面涂色的 8 个：每个刷 3 个面，总面数 $8\times3=24$。

两面涂色的 48 个：每个刷 2 个面，总面数 $48\times2=96$。

一面涂色的 96 个：每个刷 1 个面，总面数 $96\times1=96$。

新刷油漆的总面积 = 总面数 × 每个小面的面积 (1^2)。

总面积 $S=(24+96+96)\times1=216$。

☑ **总结：**本题综合了计数和表面积计算。关键是理解“重新刷漆”刷的是每个小方块原先涂色的面数，而非它的全部表面。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

把棱长 12 厘米的正方体涂红后，切成棱长 3 厘米的小正方体。三面、两面、一面涂色的各多少个?

一个棱长 8 分米的大正方体，表面涂漆，切成棱长 2 分米的小方块。没有涂漆的有多少块?

$n = 7$ 时，两面涂色的小方块比一面涂色的少多少个?

切成 64 个小正方体，求 n 和两面涂色的个数。

一面涂色的有 150 个，求大正方体原先的棱长被分成了多少段?

三面、两面、一面涂色的方块总数是 188，求 n。

0面涂色的方块有 8 个，求两面涂色的个数。

大正方体棱长 9 cm，切成棱长 1 cm的小方块，求所有涂色面的总面积。

一个涂色大正方体，两面涂色的有 60 个，它被切成了多少个小方块?

三面涂色的方块，其涂色面积占所有小方块涂色总面积的几分之几? (设 $n = 4$)

二、奥数挑战

表面涂漆的正方体，切割后得到三面红的小方块 8 个，两面红的小方块 24 个。求一面红和没有红色的小方块各多少个?

将一个正方体木块的六个面都染成红色，然后锯成 n^3 个小正方体。已知恰好有 96 个小正方体一个面也没有被染红，求 n。

把一个大正方体表面涂色后，切成 125 个小块。从中任取一个小块，它恰好有两面涂色的概率是多少?

一个长方体，长宽高分别为 a, b, c ($a > b > c \geq 2$)，表面涂色后切成棱长为1的小正方体。请推导其各类涂色小方块数量的公式。

大正方体 $n = 6$，将其中一面涂色的小方块全部拿走，剩余部分的总表面积是多少?

一个由 n^3 个小透明正方体堆成的大正方体，仅在表面一层（厚度为1）的小方块内注入荧光液。问注入荧光液的小方块有多少个?

一个魔方（$n=3$），将其表面所有小方块的中心点挖掉一个棱长为 0.5 的小洞。问挖掉部分总体积占原魔方体积的百分之几?

有 6 个面、8 个顶点、12 条棱的凸多面体都满足“欧拉公式 $V-E+F=2$”。对于表面涂色后切割的问题，这个公式有隐含联系吗？试探讨。

将一个涂色大正方体（$n=5$）的所有棱块（两面涂色）取出，拼成一个新的长方体，求这个长方体表面积的最大可能值。

将 $n=4$ 的涂色大正方体，所有小方块打乱后随机拼回一个大立方体形状。求新拼成的大立方体表面恰好有 2 个面是完整红色的概率。

第三关：生活应用（5道）

（AI立方体数据中心）某AI公司将计算服务器堆成一个巨大的立方体阵列。为散热，只对最外层的服务器进行强制风冷。若立方体阵列每边有 20 台服务器，请问需要风冷的服务器有多少台?这和染色问题有什么关系?

（航天材料焊接）一种航天器蜂窝结构材料由许多小立方体单元粘结而成。质检时，需要检查所有暴露在外的面是否有裂缝。如果一个 $10\times10\times10$ 的立方体阵列，质检员需要检查多少个“小面”?

（网购包装问题）商家用 27 个棱长为 2 dm的小正方体礼盒，紧密打包成一个大的立方体包裹。为了美观，需要在打包后的大包裹表面全部贴上包装纸。请问包装纸的面积是多少？如果每个小礼盒本身也有包装，那么有多少个小礼盒的包装会被完全包裹在里面看不到?

（3D像素艺术）一位数字艺术家用一个 $n\times n\times n$ 的立方体网格创作3D像素画。他决定只给位于模型“表面”的像素点上色。请问当 $n=10$ 时，他最多需要给多少个像素点（小立方体）上色?

（区块链与加密）在一个分布式的三维存储网络中，数据块存储在小立方体节点中。为了数据安全，系统要求每个“表面数据块”(至少一个面暴露在网络边界）必须加密。若网络规模是 $m\times m\times m$，那么需要加密的数据块数量，与 m 呈怎样的数量级关系（$O(m^2)$ 或 $O(m^3)$）？这说明了什么安全问题?

🤔 常见疑问 FAQ

专家问答：立体几何：染色问题 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难在两点：**空间想象**和**分类讨论的严谨性**。首先，学生必须在大脑中动态地“切割”和“分类”那些看不见的小方块，这对抽象思维要求高。其次，容易混淆“棱的位置”、“面的位置”和“内部”的界定，尤其是忘记 $n-2$ 中的 “-2” ，这代表了去掉两端的顶点或最外面一层。把阿星“切面包”的比喻可视化，是克服困难的第一步。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：这是培养**空间思维和有序计数能力**的绝佳模型。在高中立体几何中，它深化了对几何体结构（顶点、棱、面）的理解。在组合数学和概率中，它是最简单的**分类计数原理**和**离散结构**的实例。公式 $n^3 = 8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3$ 本身就是一个漂亮的代数恒等式，体现了整体等于部分之和的思想。更进一步，它是理解更高维度“超立方体”性质的启蒙。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有核心心法，可称“位置决定命运，公式系统搞定”。

定n：首先明确大正方体每条棱被分成的段数 n。（小棱长大棱长，一除便知晓）。

分类：牢记四种命运：角（3面）、棱（2面）、面心（1面）、核心（0面）。

套公式：

角块恒为 8。

棱块 $= 12 \times (n-2)$。

面块 $= 6 \times (n-2)^2$。

核心块 $= (n-2)^3$。

验算：检查总和是否等于 n^3。对于复杂问题，常从已知的一种数量反推出 n 或 $(n-2)$ ，再求其他。

掌握这个系统，绝大部分染色问题都可迎刃而解。

参考答案与解析

第一关（精选解析）：

解： $n=12\div 3=4$。三面：8 个。两面：$12\times(4-2)=24$ 个。一面：$6\times(4-2)^2=24$ 个。

解： $n=8\div 2=4$。0面涂色：$(4-2)^3=8$ 个。

解： 两面：$12\times(7-2)=60$，一面：$6\times(7-2)^2=150$。相差 90 个。

解： $n^3=64\Rightarrow n=4$。两面涂色：$12\times(4-2)=24$ 个。

解： $6\times(n-2)^2=150\Rightarrow(n-2)^2=25\Rightarrow n-2=5\Rightarrow n=7$。

第二关（精选解析）：

解： 由三面 8 个知是正方体。由两面 24 个知 $12(n-2)=24\Rightarrow n=4$。一面红：$6\times(4-2)^2=24$ 个。无红色：$(4-2)^3=8$ 个。

解： 无红色即 $(n-2)^3=96$。96 不是完全立方数，检查 $4^3=64$，$5^3=125$，无整数解。仔细审题，“锯成 n^3 个”，则 $(n-2)^3=96$ 应成立。但 96 开立方约 4.58，n 非整数？矛盾。可能题目意为“有 96 个**至少一面**未被染红”？或数据为 $(n-2)^3=64\Rightarrow n=6$。原题若数据为“64 个”，则 $n=6$。

解： $125=5^3$，所以 $n=5$。两面涂色有 $12\times(5-2)=36$ 个。概率 $P=\frac{36}{125}$。

第三关（精选解析）：

解： 这正是求“至少一面暴露在外”的小方块数，即总方块数减去核心块。总台数 $20^3=8000$。核心部分每边 $20-2=18$ 台，共 $18^3=5832$ 台。需风冷服务器 $8000-5832=2168$ 台。关系：需风冷的服务器 = 三面+两面+一面涂色的方块数 = $8+12\times18+6\times18^2=8+216+1944=2168$。

解： 每个暴露在外的小立方体单元，其暴露的面数不同。这等价于先求各类小方块数，再计算它们暴露的面数之和。$n=10$。

角块(3面)：8 个，贡献 $8\times3=24$ 个面。

棱块(2面)：$12\times(10-2)=96$ 个，贡献 $96\times2=192$ 个面。

面心块(1面)：$6\times(10-2)^2=6\times64=384$ 个，贡献 $384\times1=384$ 个面。

总计需检查的小面数 $=24+192+384=600$ 个。

解： $27=3^3$，所以大立方体棱长为 $2\times3=6$ dm，表面积 $6\times6^2=216$ dm²。会被完全包裹在里面的小礼盒，就是0面暴露的小方块，有 $(3-2)^3=1$ 个。

更多练习题

小学_分数巧算：裂项相消进阶

分数巧算：裂项相消(进阶) 12-19

奥数-几何-立体切分表面积

12-19

奥数-几何-三视图还原

12-19

奥数-几何-圆中方面积

12-19

奥数-几何-方中圆面积

12-19

奥数-几何-容斥求面积

12-19