奥数-几何-梯形蝴蝶模型

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：蝴蝶模型：梯形基础 原理

核心概念：想象一个梯形就像一只胖胖的蝴蝶的身体（上底和下底）。当它张开翅膀时，它的翅膀就是由两条对角线构成的——两条对角线画出四个三角形，构成了蝴蝶完整的左右翅膀。看！阿星指着左右翅膀（由对角线交叉点分隔开的两个三角形）说："这一对三角形面积永远相等。" 记住，这对翅膀（$S_{左}$ 和 $S_{右}$）是紧紧挨着蝴蝶身体的，它们是"腰上的翅膀"。至于蝴蝶头部和尾部的两个三角形（上下底边处的三角形），它们虽然大小不同，但却像蝴蝶的头部和尾巴一样，是成比例的。

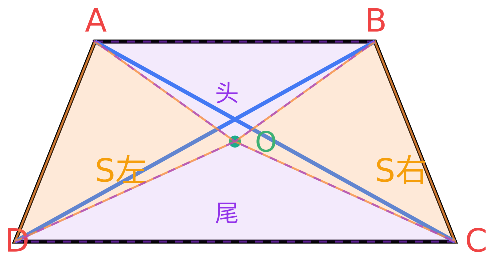
计算秘籍：

找到蝴蝶：识别梯形 $ABCD$ ($AB \parallel DC$)，连接对角线 AC 与 BD，相交于点 O。三角形 AOD 和三角形 BOC 就是那对面积相等的翅膀。

翅膀相等：根据等底等高模型，可以证明 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$。记作 $S_{左翼} = S_{右翼}$。

头尾成比例：蝴蝶头部 ($S_{\triangle AOB}$) 和尾部 ($S_{\triangle COD}$) 的面积比，等于梯形上底与下底长度之比的平方。即 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle COD} = (AB)^2 : (DC)^2$。

阿星口诀：梯形成蝶舞翩翩，对角连线分四片；腰上翅膀必相等，头尾面积比平方。



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：把蝴蝶翅膀认错，以为任意两个三角形面积相等。

→ ☑ 正解：只有以梯形的“腰”（ AD 和 BC ）为公共边的两个三角形（即 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$ ）才永远面积相等。

❌ 错误2：直接认为蝴蝶头部和尾部的三角形面积相等。

→ ☑ 正解：它们一般不相等，它们的面积比等于上底和下底长度之比的平方，即 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle COD} = (AB)^2 : (DC)^2$。

🔥 例题精讲

例题1： 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，对角线 AC、BD 交于点 O。已知 $S_{\triangle AOD} = 4$，求 $S_{\triangle BOC}$。

📌 **解析：**

第一步：识别模型。梯形 $ABCD$ 和对角线构成了标准的“蝴蝶模型”。

第二步：应用核心定理。蝴蝶的左右翅膀面积相等，即 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$。

第三步：代入计算。已知 $S_{\triangle AOD} = 4$，所以 $S_{\triangle BOC} = 4$。

☑ **总结：** 最直接的应用，找到翅膀，直接相等。

例题2： 如图，梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，对角线交于 O。已知 $S_{\triangle AOB} = 9$，$S_{\triangle DOC} = 16$，且 $AB = 3$ cm。求 DC 的长度。

📌 **解析：**

第一步：识别模型。$S_{\triangle AOB}$ 和 $S_{\triangle DOC}$ 分别是蝴蝶的“头”和“尾”。

第二步：应用头尾面积比定理。$S_{\triangle AOB} : S_{\triangle DOC} = (AB)^2 : (DC)^2$。

第三步：代入已知数。$9 : 16 = (3)^2 : (DC)^2$。

第四步：列比例式求解。$\frac{9}{16} = \frac{9}{(DC)^2}$，解得 $(DC)^2 = 16$，所以 $DC = 4$ (cm)。

☑ **总结：** 已知头尾面积和一条底边，利用面积比的平方关系求另一条底边。

例题3： 在梯形 $ABCD$ ($AB \parallel CD$) 中，对角线交于 O。已知 $S_{\triangle AOB}=2$，$S_{\triangle BOC}=4$，求梯形 $ABCD$ 的面积。

解析：

第一步：识别已知部分。$S_{\triangle AOB}=2$ (头)，$S_{\triangle BOC}=4$ (右翼)。

第二步：应用翅膀相等定理。右翼 $S_{\triangle BOC}=4$，所以左翼 $S_{\triangle AOD}=4$。

第三步：利用头尾比例求尾部面积。设 $S_{\triangle COD}=x$。根据头尾比例：$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle COD}=(AB)^2:(CD)^2$。同时，蝴蝶模型中，$S_{\triangle AOB}\times S_{\triangle COD}=S_{\triangle AOD}\times S_{\triangle BOC}$ (一个有用的推论)。

第四步：使用面积乘积关系。$2\times x=4\times 4$，解得 $x=8$。所以 $S_{\triangle COD}=8$。

第五步：求总面积。梯形面积 $S_{ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}=2+4+8+4=18$。

☑ **总结：** 综合运用翅膀相等和头尾面积关系（或乘积相等推论），求出所有部分再相加。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

在梯形中，蝴蝶的一只翅膀面积为 6，另一只翅膀面积是多少？

已知梯形上底为 2，下底为 3，蝴蝶“头部”面积为 4，求“尾部”面积。

梯形蝴蝶模型中，左右翅膀的面积分别为 S_1 和 S_2，它们的关系是 S_1 ____ S_2。

若 $S_{\triangle AOD}=5$， $S_{\triangle COD}=20$，且 $AB=1$，求 CD。

看图填空：图中梯形，已知 $S_{\triangle AOB}=1$， $S_{\triangle BOC}=2$，则 $S_{\triangle AOD}=$ ____。

判断：梯形蝴蝶模型中，$S_{\triangle AOB}$ 一定等于 $S_{\triangle COD}$。 ( )

梯形上下底之比为 $1:2$，则其蝴蝶“头”与“尾”面积之比为 ____。

已知 $S_{\triangle AOB}=3$， $S_{\triangle AOD}=6$，求 $S_{\triangle BOC}$。

梯形面积为 30，其中一对翅膀面积之和为 10，求蝴蝶“头部”和“尾部”面积之和。

简单证明：为什么梯形蝴蝶模型中 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$? (提示：考虑 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积关系)

二、奥数挑战

梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AC、BD 交于 O。已知 $S_{\triangle AOB}=18$， $S_{\triangle COD}=32$，且 $AB+CD=15$。求 AB 和 CD 的长度。

如图，梯形被对角线分成 4 个三角形，其中 3 个面积已知为 3，7，7。求梯形的面积。

在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AC \perp BD$ 于 O。若 $AD=2$， $BC=8$，求梯形面积。(提示：$S_{梯形}=\frac{1}{2}\times$ (对角线长度乘积)？先思考)

梯形蝴蝶模型中，证明：$S_{\triangle AOB}\times S_{\triangle COD}=(S_{\triangle AOD})^2$。

梯形上下底之比为 $2:3$，对角线将其面积分为 S_1,S_2,S_3,S_4 (顺时针)，已知 $S_1=8$，求 S_3。

梯形中，一对翅膀的面积分别是 m 和 n ($m\neq n$)，这个图形可能是梯形吗？为什么？

连接梯形两腰中点和对角线中点，求证所构成的四边形是平行四边形。

若梯形蝴蝶的四个三角形面积均为整数，且总面积小于 50，问这样的面积组合有多少种？(顺序不同视为不同)

梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$S_{\triangle AOB}=p^2$， $S_{\triangle COD}=q^2$，用 p,q 表示梯形的面积。

(杯赛真题改编)梯形对角线分出的四个三角形，面积依次为 S_1,S_2,S_3,S_4 (顺时针)。已知 $S_1:S_2=4:9$，且 $S_4-S_2=10$。求梯形面积。

第三关：生活应用（5道）

AI图像分割：在AI识别梯形形状的物体（如梯形广告牌）并进行分割时，算法需要计算各部分的像素面积。若将梯形的四条边和对角线视为分割线，已知“左翼”区域像素点为 12000，请问“右翼”区域像素点大约是多少？这利用了蝴蝶模型的什么原理？

航天器太阳能板布局：一个航天器的侧面可视作一个梯形结构，工程师用对角线将其加固并划分区域。已知梯形上底（短边）对应区域的承载强度为 I，下底（长边）对应区域的承载强度为 $4I$。请问这两块区域的面积之比是多少？这与蝴蝶模型的哪个结论相关？

网购包装设计：一个梯形纸盒的俯视图是对角线交叉的梯形。为了节省缓冲材料，需要知道四个三角形区域的面积。如果测量得到“头部”三角形区域的面积为 $100\ \mathrm{cm}^2$，上下底长度之比为 $1:2$，你能快速估算出“尾部”三角形区域需要多少缓冲材料吗？

城市规划：一块梯形地块被两条对角线道路分成四个区域。为平衡绿化，要求左右两个三角形区域（翅膀）的绿地面积相等。这是硬性规定吗？从数学原理上解释为什么可以或不可以。

数据可视化：在用一个梯形图表表示数据比例时，如果用对角线将其分为四块，代表四个子类别。已知类别A（头部）和类别D（尾部）的数据量比值为 $9:25$，你能推断出整个图表所代表的总数据量中，最长的底边和最短的底边所代表的数据范围之比吗？

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：蝴蝶模型：梯形基础 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：主要难点在于“想象”和“对应”。蝴蝶模型涉及四个三角形，学生容易混淆哪个是“头”、哪个是“翼”。关键在于牢记两条：1) “翅膀”是**共用梯形腰**的三角形；2) “头尾”是**共用梯形底**的三角形。用阿星的比喻建立直观形象后，再结合严格的推导（如 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$），就能从感性认识和理性证明两方面攻克它。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：它是**面积比例思想**和**几何模型化思维**的绝佳训练。首先，它为初中相似三角形（蝴蝶模型本质是相似形的特例与前置）打下直观基础，因为“头尾面积比等于底边平方比”直接源于相似比 $\frac{AB}{DC}$ 的平方。其次，在高中向量和解析几何中，遇到对角线分割多边形面积的问题，这种“整体减部分”和“利用比例”的思想依然通用。它训练了你从复杂图形中识别基本结构 (A字形 或 蝴蝶形) 的能力。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！可以总结为“**三板斧**”套路：

认模型：看见梯形+对角线交叉 → 立刻反应“蝴蝶模型”。标记四个三角形（头、左翼、右翼、尾）。

标已知：把题目给出的所有面积或线段长度标在图上对应的位置。

用关系：按顺序尝试三个核心关系：

翅膀相等：$S_{左翼} = S_{右翼}$

头尾比例：$\frac{S_{头}}{S_{尾}} = \left(\frac{上底}{下底}\right)^2$

面积乘积：$S_{头} \times S_{尾} = S_{左翼} \times S_{右翼} = (S_{翼})^2$ (当两翼相等时)

通常，已知其中两个量，就能求出所有量。

记住这个流程，绝大多数基础题和中等题都能迎刃而解。

参考答案与解析

第一关：基础热身

6。翅膀面积相等。

$S_{尾} = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 \times \frac{9}{4} = 9$。

$=$

由 $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle COD} = (AB)^2 : (CD)^2$，需先求 $S_{\triangle AOB}$。利用 $S_{\triangle AOD} \times S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD}$ 且 $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} = 5$，得 $5 \times 5 = S_{\triangle AOB} \times 20 \Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$。则 $\frac{5/4}{20} = \frac{1}{CD^2} \Rightarrow CD^2 = 16$， $CD = 4$。

2。翅膀相等， $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = 2$。

错误。只有当上底等于下底（即梯形变为平行四边形）时才相等，一般情况下成比例。

$1^2 : 2^2 = 1 : 4$。

6。翅膀相等。

$30 - 10 = 20$。总面积减去两翼面积和。

因为 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$ (同底 AB，等高——平行线间距离)。同时减去公共部分 $S_{\triangle AOB}$，得 $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$。

二、奥数挑战

由面积比：$\frac{18}{32} = \frac{AB^2}{CD^2} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$。设 $AB = 3k, CD = 4k$，则 $3k + 4k = 15 \Rightarrow k = \frac{15}{7}$。故 $AB = \frac{45}{7}, CD = \frac{60}{7}$。

设四个三角形面积依次为 S_1, S_2, S_3, S_4。已知 $3, 7, 7, ?$。根据翅膀相等，有两种可能：(3, 7, 7, 3) 或 (7, 3, 3, 7)。但若 $S_1 = 3, S_2 = 7, S_3 = 7$，则 S_4 需满足 $3 \times S_4 = 7 \times 7 = 49 \Rightarrow S_4 = \frac{49}{3} \neq 3$，不符。若 $S_1 = 7, S_2 = 3, S_3 = 7$，则 S_4 需满足 $7 \times S_4 = 3 \times 7 = 21 \Rightarrow S_4 = 3$。故面积为 $7, 3, 7, 3$，总和 20。

在直角梯形蝴蝶中，有 $S_{梯形} = \frac{1}{2} \times (AC \times BD)$。由蝴蝶模型及相似，可推导出 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = AD^2 : AD \cdot BC : BC^2 : AD \cdot BC$。即面积比为 $4 : 16 : 64 : 16 = 1 : 4 : 16 : 4$。总面积份数为 $1 + 4 + 16 + 4 = 25$。又因为 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{2} \cdot \frac{AD}{2} = \frac{AD^2}{4} = 1$ (设 $AD = 2$)。故总面积 $S = 1 \times 25 = 25$。
由头尾比例：$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2$。由翅膀相等和共高模型，可得 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{AB}{DC}$ (考虑 $\triangle AOB$ 与 $\triangle AOD$ 在 BD 边上的高之比)。所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle COD}} = \left(\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}}\right)^2$，化简即得 $S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD} = (S_{\triangle AOD})^2$。
上下底比 $2 : 3$，则头尾面积比 $4 : 9$。设 $S_1 = 8$ (头)，则 S_3 (尾) = $8 \times \frac{9}{4} = 18$。

第三关：生活应用（思路点拨）

约 12000。利用蝴蝶模型“翅膀面积相等”的原理。
面积之比为 $1 : 4$。这与蝴蝶模型中“头尾面积比等于底边平方比”的结论相关。承载强度类比为底边长度，面积比即为强度比的平方。
尾部面积 = $100 \times (2)^2 = 400\ \text{cm}^2$。
是硬性规定，但同时也是必然的数学结果。根据蝴蝶模型原理，左右两翼面积天生相等，无需额外规定，这是由梯形和平行线的性质决定的。
底边数据范围之比等于数据量平方根之比，即 $9 : \quad 25 = 3 : 5$。

更多练习题

奥数-几何-鸟头模型应用
12-19

奥数-几何-鸟头模型公式
12-19

奥数-几何-矩形一半模型
12-19

奥数-几何-一半模型基础

12-19

奥数-几何-等积变形

12-19

奥数-几何-割补法求面积

12-19