# 奥数-几何-方中圆面积

刚刚 0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

## 在线阅读

### 阿星精讲：圆与扇形：方中圆 原理

**核心概念：** 想象一下，正方形是一个严肃、有棱角的“方盒子先生”。现在，我们要在里面放下一个最大、最圆润的“圆滚滚小姐”。她得非常小心，不能碰到“方盒子先生”的任何一条边，但又想尽可能占满空间。结果就是，她的腰围（直径）刚好等于“方盒子先生”的宽度（边长）。于是，一个奇妙的常数诞生了——无论“方盒子先生”是大是小，“圆滚滚小姐”占据的面积总是他的 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ 倍。阿星称它为“和谐常数”，因为它完美平衡了方与圆。

**计算秘籍：**

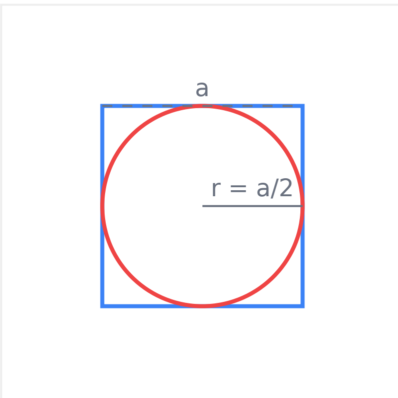
设定正方形边长为 $a$，则其面积为 $S_{方} = a^2$。

此时内切圆的直径等于边长 $a$，所以半径 $r = \frac{a}{2}$。

圆的面积为 $S_{圆} = \pi r^2 = \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{4}a^2$。

面积比例（圆/方）为：$\frac{S_{圆}}{S_{方}} = \frac{\frac{\pi}{4}a^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}$。这个比例是固定值，约为 0.785。

**阿星口诀：** 方中圆，很好记，边长等于圆直径。面积比例是 $\pi$ 除以 4，零点七八五要牢记！



## ⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：已知正方形边长，求圆面积时，误将边长直接当作半径代入公式 $S = \pi r^2$。
☑ 正解：牢记“直径=边长”，所以半径 $r = \frac{\text{边长}}{2}$。务必先除以 2 再平方。

❌ 错误2：已知圆的面积（或周长），求正方形面积时，试图直接利用 $\pi$ 进行复杂运算。
☑ 正解：善用比例常数 $\frac{\pi}{4}$。例如，已知 $S_{圆}$， 则 $S_{方} = S_{圆} \div \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi} S_{圆}$。这比先求半径再求边长更快捷准确。

## 🔥 例题精讲

**例题1**：一个正方形相框的边长是 10 cm，在里面装一个最大的圆形照片，这张圆形照片的面积是多少?

📌 **解析**:

这是典型的“方中圆”。正方形边长 $a = 10$。

内切圆半径 $r = \frac{a}{2} = \frac{10}{2} = 5\ (cm)$。

圆面积 $S_{圆} = \pi r^2 = \pi \times 5^2 = 25\pi\ (cm^2)$。

若取 $\pi \approx 3.14$，则 $S_{圆} \approx 78.5\ cm^2$。

☑ **总结**：直接应用基础关系式，先求半径，再求面积。

**例题2**：在一个“方中圆”图形中，已知阴影部分（正方形与圆之间的部分）的面积是 $86\ cm^2$，求正方形的面积。

📌 **解析**:

设正方形面积为 $S_{方}$。圆面积占比为 $\frac{\pi}{4}$，所以圆面积 $S_{圆} = \frac{\pi}{4} S_{方}$。

阴影面积 = 正方形面积 - 圆面积 = $S_{方} - \frac{\pi}{4} S_{方} = (1 - \frac{\pi}{4}) S_{方}$。

已知阴影面积为 86，即 $(1 - \frac{\pi}{4}) S_{方} = 86$。

计算系数：$1 - \frac{\pi}{4} \approx 1 - 0.785 = 0.215$。

所以 $S_{方} = 86 \div 0.215 = 400\ (cm^2)$。

☑ **总结**：利用比例常数 $\frac{\pi}{4}$，将正方形和圆的面积视为整体“1”和部分“$\frac{\pi}{4}$”的关系，列方程求解非常高效。

**例题3：** 一个“方中圆”图形中，正方形的周长比圆的周长多 8.6 cm。求正方形的边长。（$\pi$\取3.14）

**解析：**

设正方形边长为 $a$，则其周长为 $4a$。

内切圆直径为 $a$，半径为 $\frac{a}{2}$，周长为 $2\pi \times \frac{a}{2} = \pi a$。

根据题意：正方形周长 - 圆周长 = 8.6，即 $4a - \pi a = 8.6$。

合并同类项：$(4 - \pi)a = 8.6$。

代入 $\pi = 3.14$，得 $(4 - 3.14)a = 0.86a = 8.6$。

解得 $a = 8.6 \div 0.86 = 10\ (cm)$。

☑ **总结：** 当问题涉及周长差时，分别用含有边长 $a$ 的式子表示两种图形的周长，再根据等量关系建立方程。这里的系数 $(4 - \pi)$ 也是一个有趣的小常数。

## 阶梯训练

### 第一关：基础热身（10道）

正方形边长为 $6\ cm$，求其内最大圆的面积。

正方形边长为 $2\ m$，求其内最大圆的周长。

已知正方形内最大圆的半径是 $4\ dm$，求正方形的面积。

一个“方中圆”，正方形面积是 $64\ cm^2$，求圆的面积。（$\pi$\取3.14）

一个“方中圆”，圆的面积是 $50.24\ cm^2$，求正方形的边长。（$\pi$\取3.14）

计算边长 $1\ cm$ 的正方形与其内切圆的面积之比。

一个“方中圆”图形的正方形部分被涂上颜色，已知圆面积为 $78.5\ m^2$，求涂色面积。（$\pi$\取3.14）

正方形边长扩大到原来的 2 倍，其内切圆面积扩大到原来的几倍？

用一根长 $40\ cm$ 的铁丝围成一个正方形，再在这个正方形里画一个最大的圆，这个圆的半径是多少 $cm$？

判断题：在“方中圆”中，圆的周长总是正方形周长的 $\frac{\pi}{4}$ 倍。

## 二、奥数挑战

“方中圆”中，圆的面积是 $12\pi$，求正方形对角线的长度。

一个“方中圆”，阴影部分（方减圆）的面积是 $21.5\ cm^2$，求圆的周长。（$\pi$\取3.14）

大小两个正方形并排，它们内部各画一个最大的圆。大正方形边长是小正方形的 2 倍，求大圆面积是小圆面积的几倍？

从一个面积是 80 的正方形纸片上，剪下一个最大的圆，这个圆的面积是多少？（结果保留 $\pi$）

“方中圆”图形中，正方形的顶点正好都在同一个圆周上（即“圆中方”），请问这个外接圆的面积是中间那个内切圆面积的多少倍？

一个“方中圆”被一条连接正方形对边中点的直线穿过，求直线在圆内部分的长度与正方形边长的关系。

用“方中圆”的模型证明：$\frac{\pi}{4} < 1$，且 $\frac{4}{\pi} > 1$。

若“方中圆”中，圆面积与正方形面积的比值用百分数表示，约为百分之几？

一个正方形和一个它内切圆的周长之和是 $82.8\ cm$，求正方形的面积。（$\pi$\取3.14）

有四个同样大小的“方中圆”图形，将它们的圆的部分剪下来，能否无重叠地拼满一个同样边长的新正方形？为什么？

### 第三关：生活应用（5道）

(AI图像处理) 在计算机视觉中，经常需要将图片裁剪并内接于一个圆形头像框。如果程序规定方形原图的边长像素为 512，那么生成的圆形头像的有效像素面积（以像素为单位）大约是多少？（提示：像素不可分割，估算即可）

(航天科技) 某卫星太阳能帆板设计为正方形，为了最大化利用面积并减轻重量，工程师想在板上嵌入多个圆形太阳能电池片。若单块正方形帆板面积为 $4\ m^2$，问最多能利用多少平方米的面积来铺设半径为 $0.2\ m$ 的圆形电池？（提示：考虑排列，非简单比例）

(材料力学) 一根方形截面的金属梁，边长 $a$。要在其中钻出一个最大的圆形通孔以减轻重量。钻孔后，梁的横截面积减少了百分之几？（用含 $\pi$ 的式子表示）

(网购包装) 一个边长为 30 $cm$ 的立方体纸箱，为了保护里面一个易碎的球形装饰品，需要用泡沫填充球形与箱角之间的空隙。已知球形装饰品是能放入箱内的最大球体，求需要填充的空隙总体积。（提示：先求球体体积）

(数据压缩) 在数字存储中，一张 $1000 \times 1000$ 像素的方形黑白图片（每个像素非黑即白）。若只存储其内切圆区域内的像素信息，大约可以节省多少百分比的数据存储空间？（忽略文件头等信息）

## 🤔 常见疑问 FAQ

### 💡 专家问答：圆与扇形：方中圆 的深度思考

**问：为什么很多学生觉得这一块很难？**

答：关键在于没有把图形之间的“数量关系”转化为清晰的“比例关系”。学生往往孤立记忆正方形面积公式 $a^2$ 和圆面积公式 $\pi r^2$，却忽略了在“方中圆”这个特定模型中，$a$ 与 $r$ 被牢牢锁定为 $a = 2r$。一旦建立起 $S_{圆} = \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi}{4}a^2 = \frac{\pi}{4}S_{方}$ 这个认知，题目就从具体的数字计算升维成了恒定的比例分析，难度大大降低。觉得难，通常是还在低维进行复杂计算。

**问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？**

答：帮助极大，它是“数形结合”和“定量分析”思想的绝佳启蒙。

**几何基础：**为学习更复杂的组合图形（如“圆中方”、“滚动圆”、“扇环”）打下基础，理解图形相切、内接的核心是抓住关键线段（如这里的半径与边长）的关系。
**代数思维：**它天然地引出了“常数比例” $\frac{\pi}{4}$。这类似于物理学中的“常数”(如重力加速度 $g$ )，让你学会用比例和方程（如 $S_{阴} = (1 - \frac{\pi}{4})S_{方}$）来思考，而不是每次都从头推导。
**微积分雏形：**“方中圆”面积占比约为 0.785，这直观地展示了用规则图形（正方形）去逼近和度量不规则图形（圆）的早期思想，是未来学习“极限”和“积分”的直观铺垫。

**问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？**

答：有核心心法，可称为“阿星两步定乾坤法”：
**第一步：锁定关系。** 读题后立刻在脑中或草图上明确：正方形边长 $a$ = 圆的直径 = $2r$。

这是所有推导的基石。
**第二步：选择路径。** 根据问题，选择最直接的代数或比例路径：

若已知 $a$ 或 $r$ 的具体值，直接代入公式 $S_{圆} = \pi r^2, C_{圆} = 2\pi r$。

若已知面积（或周长）求另一个图形的面积（或周长），**强烈推荐使用比例常数 $\frac{\pi}{4}$ 及其变形**。例如，已知 $S_{圆}$ 求 $S_{方}$，直接用 $S_{方} = S_{圆} \div \frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi} S_{圆}$。这能避免开方、平方的繁琐运算，是最高效的“套路”。

记住，$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ 和 $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$ 这两个数值，在估算和速算中尤其管用。

---

参考答案与解析
**第一关：基础热身**

$r = 3$，$S = \pi \times 3^2 = 9\pi\ (cm^2)$
$r = 1$，$C = 2\pi \times 1 = 2\pi\ (m)$
$a = 2r = 8$，$S_{方} = 8^2 = 64\ (dm^2)$
$S_{圆} = \frac{\pi}{4} \times 64 = 16\pi \approx 50.24\ (cm^2)$
$S_{方} = 50.24 \div \frac{\pi}{4} = 50.24 \times \frac{4}{3.14} = 64$，$a = \quad 64 = 8\ (cm)$
$S_{方} : S_{圆} = 1 : \frac{\pi}{4} = 4 : \pi$
$S_{方} = 78.5 \div \frac{\pi}{4} = 78.5 \times \frac{4}{3.14} = 100$，涂色面积=$100 - 78.5 = 21.5\ (m^2)$
4倍（面积与边长平方成正比）
$a = 40 \div 4 = 10$，$r = 10 \div 2 = 5\ (cm)$
错误。圆周长=$\pi a$，正方形周长=$4a$，比值为$\frac{\pi}{4}$，但前提是单位长度一致，表述不严谨。准确说法：比值是 $\frac{\pi}{4}$。

## 二、奥数挑战

$S_{圆} = 12\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 12, r = 2\quad 3$，$a = 2r = 4\quad 3$，对角线=$a\quad 2 = 4\quad 6$。
$S_{阴} = (1 - \frac{\pi}{4}) S_{方} = 21.5 \Rightarrow S_{方} = 21.5 \div 0.215 = 100$，$S_{圆} = 78.5$，由$S_{圆} = \pi r^2$得$r^2 = 25, r = 5$，$C = 2\pi \times 5 = 31.4\ (cm)$。
4倍（面积与边长平方成正比）。
$S_{圆} = \frac{\pi}{4} \times 80 = 20\pi$。

2倍。设正方形边长为$a$，内切圆半径$r_1 = a/2$；外接圆半径$r_2$为对角线一半=$a \quad 2/2$。面积比=$(r_2/r_1)^2 = ( \quad 2)^2 = 2$。

长度等于圆的直径，即正方形边长$a$。

证明：因为圆的面积小于正方形面积，所以$\frac{S_{圆}}{S_{方}} = \frac{\pi}{4} < 1$， 其倒数$\frac{4}{\pi} > 1$。

78.5%。

$4a + \pi a = (4+\pi)a = 82.8$， $a = 82.8 \div 7.14 \approx 11.6$， $S_{方} \approx 134.56\ (cm^2)$。

不能。四个圆的面积总和=$4 \times \frac{\pi}{4} S_{方} = \pi S_{方} \approx 3.14 S_{方} > S_{方}$， 面积已经超出了，且形状是圆形，无法无重叠拼满正方形。

**第三关：生活应用**

圆形头像的有效像素面积 ≈ $512^2 \times \frac{\pi}{4} \approx 262144 \times 0.785 \approx 205887$ 像素。

此题为排列问题，非简单比例。帆板边长=2 $m$。半径0.2 $m$的圆，直径0.4 $m$。沿边长可排列$2 \div 0.4 = 5$个，共$5 \times 5 = 25$个圆。单圆面积=$\pi \times 0.2^2 = 0.04\pi$， 总面积=$25 \times 0.04\pi = \pi \approx 3.14\ m^2$。利用率约为$3.14/4 = 78.5\%$。

减少比例 = $\frac{S_{圆}}{S_{方}} = \frac{\pi}{4}$， 即减少了 $\frac{\pi}{4} \times 100\%$。

球体是立方体内最大的球，其直径等于边长30 $cm$，半径$r = 15\ cm$。球体积$V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 3375 = 4500\pi\ (cm^3)$。纸箱容积$V_{箱} = 30^3 = 27000\ (cm^3)$。空隙体积=$27000 - 4500\pi \approx 27000 - 14130 = 12870\ (cm^3)$。

节省比例 = 正方形面积 - 圆面积占比 = $1 - \frac{\pi}{4} \approx 21.5\%$。



## 更多练习题

奥数-几何-容斥求面积

12-19

奥数-几何-毕克定理

12-19

奥数-几何-沙漏模型

12-19

奥数-几何-燕尾模型逆推

12-19

奥数-几何-燕尾模型面积比

12-19

奥数-几何-任意四边形蝴蝶

12-19