奥数-几何-容斥求面积

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：容斥原理：重叠面积 原理

核心概念：想象一下，阿星有两张发光的魔法卡片（正方形A和B）。当他把两张卡片完美重叠放在桌上时，发光的总面积就是一张卡片的面积。但如果他把两张卡片**错开一点**放置，让它们有一部分重叠，那发光的区域就变大了！这时，总面积是多少呢？你是不是想把两张卡片的面积直接加起来（$S_A + S_B$）？**错！**那样你就把重叠的部分（两人“踩”到的同一块地）算了两次！所以，正确的总面积应该是：两张卡片的面积之和，再**减去**一次它们重叠部分的面积。这就是容斥原理的精髓：**要计算覆盖的总范围，先把各部分加起来，再把多算的重叠部分“踢出去”一次！**

计算秘籍：

独立计算：算出图形A的面积 S_A。

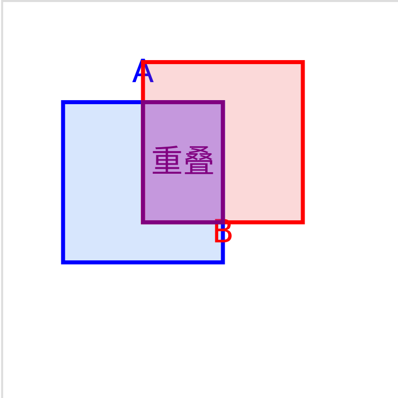
独立计算：算出图形B的面积 S_B。

寻找重叠：找到A和B重叠部分的形状，算出其面积 $S_{A\cap B}$。

运用容斥：总面积 $S_{总} = S_A + S_B - S_{A\cap B}$。

若求阴影（仅被一张卡片覆盖的部分）：则 $S_{阴影} = S_{总} - S_{A\cap B} = S_A + S_B - 2 \times S_{A\cap B}$。

阿星口诀：“面积相加很简单，重叠部分会捣乱。多算一次要扣掉，容斥原理是好汉！”



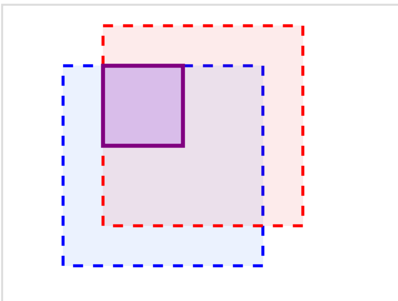
⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**直接相加不扣减** → 以为总面积就是 S_A+S_B。
☑ 正解：两个图形只要有重叠，相加时重叠部分就被算了两次，必须减去一次，即 $S_{总}=S_A+S_B-S_{重叠}$。

❌ 错误2：**找错重叠区域** → 当图形错位或不规则时，凭感觉判断重叠部分的形状和大小。
☑ 正解：必须**严格作图或逻辑推理**，确定重叠部分的精确边界，并选择合适的方法（公式、割补、网格等）计算其面积。

🔥 例题精讲

例题1：如图，两个边长为 10 cm 的正方形部分重叠，重叠部分是一个边长为 4 cm 的小正方形。求两个正方形覆盖的总面积。



📌 **解析**：

正方形A面积：$S_A=10\times10=100\ (\mathrm{cm}^2)$。

正方形B面积：$S_B=10\times10=100\ (\mathrm{cm}^2)$。

重叠部分面积：$S_{重}=4\times4=16\ (\mathrm{cm}^2)$。

根据容斥原理：$S_{总}=S_A+S_B-S_{重}=100+100-16=184\ (\mathrm{cm}^2)$。

☑️ **总结：**直接应用核心公式，关键是准确识别重叠部分的形状和尺寸。

例题2：在 8×8 的网格中（每个小格子面积为 1），放置了两个相同的 4×3 长方形。一个长方形水平放置，另一个倾斜放置，它们重叠部分的面积恰好是 5。求两个长方形在网格内覆盖的总格子数（面积）。

📌 **解析：**

单个长方形面积：$S_{长} = 4 \times 3 = 12$。

两个长方形面积和：$S_{和} = 12 + 12 = 24$。

已知重叠面积：$S_{重} = 5$。

覆盖总面积：$S_{总} = S_{和} - S_{重} = 24 - 5 = 19$。

虽然不知道长方形具体位置，但容斥原理只关心“单独面积”和“共有面积”，与具体位置无关。

☑️ **总结：**容斥原理是一个“整体性”原理，有时我们不需要知道图形的精确位置，只要知道单独和重叠部分的面积就能解题。

例题3：两个等腰直角三角形重叠放置，直角边长分别为 6 和 8。已知它们重叠部分的面积是 7，并且未被覆盖的阴影部分总面积是 20。求较小的那个三角形的面积。

📌 **解析：**

设小三角形面积为 x，大三角形面积为 y。已知 $y = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$。

根据容斥，覆盖总面积 $S_{总} = x + y - S_{重} = x + 32 - 7 = x + 25$。

阴影面积 = 总面积 - 重叠面积 = $(x + 25) - 7 = x + 18$。

题目告知阴影面积为 20，所以 $x + 18 = 20$。

解得：$x = 2$。

检验：小三角形直角边为 6，理论面积应为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$，这与我们算出的 2 矛盾？等等，这里有个陷阱！题目说“两个等腰直角三角形”，但没说哪个大哪个小！我们假设的 y 是 8 为边长的，但 x 是未知的。我们需要重新审视。

设两三角形面积分别为 S_1 和 S_2 ($S_1 \leq S_2$)，重叠面积为 7。

总面积 $S_{总} = S_1 + S_2 - 7$。

阴影面积 $S_{阴} = S_{总} - 7 = S_1 + S_2 - 14 = 20$。所以 $S_1 + S_2 = 34$。

已知可能的三角形面积：边长为 6 的面积为 18，边长为 8 的面积为 32。因为 $18 + 32 = 50 \neq 34$，所以两个三角形并不都是题目中给定边长的！可能有一个更小的。

由 $S_1 + S_2 = 34$，且 $S_1, S_2 > 7$ (因为重叠部分为7)，且一个是 18 或 32。若 $S_2 = 32$，则 $S_1 = 2$，这与 $S_1 > 7$ 矛盾。若 $S_2 = 18$，则 $S_1 = 16$，这个 16 可以是直角边为 $32 \approx 5.66$ 的等腰直角三角形。

因此，较小的三角形面积是 16。(验证：总面积=$18 + 16 - 7 = 27$，阴影=$27 - 7 = 20$，符合。)

✅ **总结：**当问题中含有多个未知量时，容斥原理可以帮我们建立方程。同时，要警惕题目中的隐含条件和多种可能性，并进行验证。

阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

两个边长分别为 5cm 和 7cm 的正方形部分重叠，重叠部分是一个面积为 $9\ \text{cm}^2$ 的正方形。求覆盖的总面积。

一个圆面积 $28.26\ \text{cm}^2$，一个正方形面积 $25\ \text{cm}^2$，它们重叠了 $10\ \text{cm}^2$。求图形覆盖的总面积。

两个完全相同的长方形，长 8cm，宽 3cm，重叠成一个“十”字形，中间重叠部分是边长为 2cm 的正方形。求这两个长方形拼在一起的外围周长。

用容斥原理解释：为什么 $15 + 20 - 5 = 30$ 可以表示两个集合的并集元素个数？

一块地被两个花坛覆盖，一个花坛面积 40 平米，另一个 35 平米，两个花坛共同覆盖的区域有 12 平米。求这块地至少有多大？

阿星有两张不规则的彩纸，面积分别是 $A = 100$，$B = 80$，把它们部分重叠贴在墙上后，测得墙上被覆盖的总面积是 155。求重叠部分的面积。

一个图形由两个半圆组成，它们直径重合，直径长 10。求这个图形的总面积。（提示：两个半圆重叠在一条直径上）

两个三角形面积分别是 24 和 30，它们重叠部分的面积是 6。求只属于其中一个三角形的区域面积之和（即阴影总面积）。

在网格纸上画两个 3×4 的长方形，让它们重叠一个 2×2 的格子。数一数，总共覆盖了多少个独立的格子？

已知 $S_{总} = 50, S_A = 30, S_{重叠} = 8$，求图形B的面积 S_B。

二、奥数挑战

三个边长为 6 的正方形如图中心重合，依次旋转 30°。已知任意两个正方形重叠部分的面积都是 12，三个正方形共同重叠部分的面积是 4。求三个正方形覆盖的总面积。（提示：使用三元容斥原理）

一个边长为 10 的正方形和一个半径为 5 的圆形部分重叠，圆心在正方形一条边的中点上。求正方形和圆形覆盖的总面积。（取 $\pi \approx 3.14$）

下图是一个“回”字形，由两个同心正方形组成，外边长 10，内边长 6。现有一个倾斜的、边长为 8 的正方形与其部分重叠。若重叠部分恰好都是与“回”字形中“环”区域重叠，且面积为 15。求这个倾斜正方形与“回”字形覆盖的总面积。

两个等腰直角三角形的斜边重合，直角顶点在重合线的两侧。小三角形斜边长 4，大三角形斜边长 6。求两个三角形覆盖的总面积。

在 5×5 方格中，放入两个不同的“L”形方块（面积均为 4）。它们最多可以覆盖多少个格子？最少呢？（考虑重叠）

一个正六边形和一个正三角形部分重叠。已知六边形面积是 54 3，三角形面积是 16 3，它们不重叠的部分（阴影）面积之和是 50 3。求重叠部分的面积。

两个平行四边形，底和高分别相等，将一个旋转 60° 后压在另一个上面。若每个平行四边形面积均为 48，重叠部分是一个面积为 18 的六边形。求覆盖的图形外部轮廓的周长。

三个圆两两相交，每个圆面积都是 14π，每两个圆重叠部分的面积都是 4π，三个圆共同重叠部分的面积是 π。求三个圆覆盖的总面积。

用容斥原理证明：在 1 到 100 的整数中，能被 2 或 3 整除的数有多少个？

一个正方形被两条对角线分成 4 个相同的小三角形。分别以其中两个相邻小三角形的公共边为斜边，向外作两个等腰直角三角形。求这两个新作的三角形与原来正方形覆盖的总面积。（设原正方形边长为 a）

第三关：生活应用（5道）

AI视觉识别：一个AI系统用两个不同的算法检测图片中的猫咪。算法A识别出的猫咪区域面积为 2500 像素，算法B识别出的区域面积为 1800 像素。两个算法都识别出的区域（确信为猫咪）面

积为 1200 像素。问这张图片中，被至少一个算法认为是猫咪的区域总面积是多少像素?

物流覆盖：某快递公司在城市有两个配送中心，中心A的配送范围可覆盖 $50\ \mathrm{km}^2$ 的区域，中心B可覆盖 $40\ \mathrm{km}^2$ 的区域。由于规划合理，两个中心的覆盖区域有 $15\ \mathrm{km}^2$ 的重叠（用于应对高峰和备份）。问该公司在这个城市的理论服务覆盖面积是多少?

无线网络：教室里有两个Wi-Fi路由器，路由器A的信号有效区域是一个半径 10 米的圆，路由器B是一个半径 8 米的圆。为了获得最佳信号，需要将这两个路由器放置得让它们的覆盖区域有 30π 平方米的重叠。问教室中能收到至少一个Wi-Fi信号的最大总面积是多少平方米? （π 保留）

航天轨道：两颗地球观测卫星的拍摄范围在地球表面分别对应两块圆形区域（近似平面），面积各为 S。它们的拍摄区域有部分重叠，重叠面积为 $0.3S$。问在一次协同任务中，它们能监测到的地表总面积是多少? （用含 S 的式子表示）

电商推荐：某购物平台统计，在“618”活动中，点击“数码专区”的用户占访客的 40%，点击“家电专区”的用户占 55%，而两个专区都点击的用户占 25%。请问，至少点击了一个专区的用户占比是多少?

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：容斥原理：重叠面积 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难?

答：难点通常不在于公式 $S_A + S_B - S_{\text{重}}$ 本身，而在于**对“重叠部分”的识别和计算**。图形一旦错位、旋转或形状不同，重叠部分就变得不规则，学生缺乏将其“隔离”并独立计算面积的技巧。其次，是思维定势，看到“总共”就只想相加，缺乏“减去多加的”这种逆向思维。这需要从具体的、可视化的比喻（如阿星的两张卡片）开始，建立强烈的直观印象。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助?

答：帮助极大！这是**集合论思想**在几何中的第一次生动体现。它直接对应集合的并集运算：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。未来在学习概率时，计算 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 如出一辙。在组合数学、数论（如整除计数问题）中，容斥原理更是核心工具。它训练的是**分类、合并与修正**的精密逻辑，是数学建模中处理“重复计数”问题的基石。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！可以遵循以下**四步法**：

分离：在脑海或草图上，将复合图形拆解成独立的、规则的部分 A 和 B。

标注：明确标出或求出 S_A 和 S_B。

锁定：用不同颜色的笔或阴影，**严格界定**出 A 和 B 共有的区域 C，并想办法求出 S_C。

容斥：代入公式 $S_{总} = S_A + S_B - S_C$ 计算。如果求的是“只属于A或只属于B”的阴影，则用 $S_{总} - S_C$ 或 $S_A + S_B - 2S_C$。

无论图形多复杂，这四步都是清晰的思考路径。核心中的核心，永远是第三步：**找准并算对那个“重叠部分”。**

参考答案与解析

第一关：基础热身

$S_{总} = 5^2 + 7^2 - 9 = 25 + 49 - 9 = 65\ (\mathrm{cm}^2)$。

$S_{总} = 28.26 + 25 - 10 = 43.26\ (\mathrm{cm}^2)$。

两个长方形总面积：$2 \times (8 \times 3) = 48$。重叠面积：$2 \times 2 = 4$。覆盖总面积：$48 - 4 = 44\ (\mathrm{cm}^2)$。周长需具体画图，但面积计算是容斥的直接应用。

设集合A有 15 个元素，B有 20 个元素，A与B交集有 5 个元素。直接相加 $15 + 20$ 会把交集中的 5 个元素算两次，所以减去一次，得到并集元素数 30。

“至少有多大”即求覆盖总面积：$40 + 35 - 12 = 63$ (平米)。

由 $S_A + S_B - S_{重} = S_{总}$，得 $100 + 80 - S_{重} = 155$，所以 $S_{重} = 25$。

两个半圆面积之和等于一个整圆面积：$S_{圆} = \pi \times (10/2)^2 = 25\pi$。重叠部分是一条线段（直径），面积为 0。所以总面积就是 25π。这里重叠部分面积为 0，容斥原理依然成立：$S_{总} = S_{半圆1} + S_{半圆2} - 0$。

阴影总面积 = $(S_1 + S_2) - 2 \times S_{重} = (24 + 30) - 2 \times 6 = 54 - 12 = 42$。或先求总面积：$54 - 6 = 48$，再减去一次重叠：$48 - 6 = 42$。

一个长方形占 12 格，两个共 24 格。重叠 4 格。覆盖总独立格子数：$24 - 4 = 20$（个）。

由 $S_A + S_B - S_{重} = S_{总}$，得 $30 + S_B - 8 = 50$，解得 $S_B = 28$。

第二关 & 第三关解析略（供教师或深入学习使用）。核心思路均已蕴含在前述原理和例题讲解中。关键在于熟练运用公式，并准确分析复杂图形中的重叠关系。

更多练习题

奥数-几何-毕克定理

12-19

奥数-几何-沙漏模型

12-19

奥数-几何-燕尾模型逆推

12-19

奥数-几何-燕尾模型面积比

12-19

奥数-几何-任意四边形蝴蝶

12-19

奥数-几何-蝴蝶模型份数

12-19