奥数-几何-圆中方面积

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：圆与扇形：圆中方 原理

核心概念：想象一下，圆就像一个妈妈，正方形就像一个调皮的宝宝。宝宝想在妈妈的肚子里（圆内）长得最大，他会怎么做？他必须“顶天立地”——四个顶点都紧紧贴在妈妈的肚皮（圆周）上。这时，阿星发现，这个最大的“正方形宝宝”其实可以平躺着，被妈妈的“身高”（直径）从中间劈开，变成了两个一模一样的等腰直角三角形。这两个三角形的“底边”就是妈妈的“身高”——圆的直径 d，而它们的“高”正好是圆的半径 r。所以，我们是通过“劈开”正方形来认识它的！

计算秘籍：

已知圆的直径 d，或半径 r（其中 $d = 2r$）。

将圆内最大正方形看作两个底为 d，高为 r 的三角形。

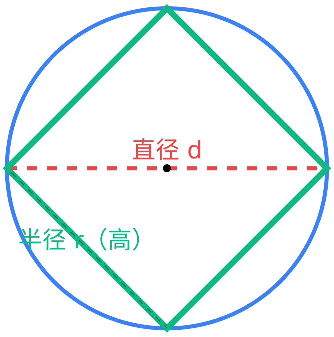
一个三角形面积：$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 底 \times 高 = \frac{1}{2} \times d \times r = \frac{1}{2} \times 2r \times r = r^2$。

正方形面积：$S_{方} = 2 \times S_{\triangle} = 2 \times r^2$。

核心公式： 圆内最大正方形面积 $S_{方} = 2r^2 = \frac{1}{2}d^2$。

与圆面积 $S_{圆} = \pi r^2$ 的比：$\frac{S_{方}}{S_{圆}} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}$。

阿星口诀：圆中方的面积，直径平方除以二；若要半径来帮忙，记住“两倍的平方”。



⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：看到“圆内最大正方形”，就用“半径 × 半径”算面积。 → ✅ 正解：最大的正方形，它的对角线才是直径！直接“半径 × 半径”得到的是以半径为边的小正方形面积。牢记阿星的“劈开法”，面积是 $2r^2$。

❌ 错误2：已知正方形面积 $S_{方}$，求圆面积时，直接用 $S_{方} \times \pi$。 → ✅ 正解：它们之间差一个固定比例。由 $S_{方} = 2r^2$ 得 $r^2 = \frac{S_{方}}{2}$，所以 $S_{圆} = \pi r^2 = \pi \times \frac{S_{方}}{2} = \frac{\pi}{2} S_{方}$。

🔥 例题精讲

例题1：在一个半径为 $6\ cm$ 的圆形纸片中，剪出一个最大的正方形，这个正方形的面积是多少?

📌 **解析：**

第一步（阿星劈开法）：这个最大正方形可看作两个底为直径、高为半径的三角形。直径 $d = 2 \times 6 = 12\ cm$，半径 $r = 6\ cm$。

第二步（计算面积）：一个三角形面积 $S_{\triangle} = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36\ (cm^2)$。正方形面积 $S_{方} = 2 \times 36 = 72\ (cm^2)$。

快解：直接使用核心公式 $S_{方} = 2r^2 = 2 \times 6^2 = 2 \times 36 = 72\ (cm^2)$。

✅ **总结：**遇到给半径求“圆中方”，果断用“2倍半径的平方”。

例题2：一个圆形锅盖的直径是 $40\ cm$，能放入这个锅盖内的最大正方形砧板的面积是多少?

📌 **解析：**

第一步（理解题意）：“能放入”即指“圆内最大正方形”，直径 $d = 40\ cm$。

第二步（阿星劈开法）：正方形可劈成两个底为 $40\ cm$，高为 $20\ cm$ 的三角形。

第三步（计算面积）： 直接使用直径公式：$S_{方} = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \times 40^2 = \frac{1}{2} \times 1600 = 800\ (cm^2)$。

✅ **总结：** 给直径更方便，口诀“直径平方除以二”。

例题3： 如图，在一个半圆（半径为 $5\ cm$）内作一个最大的正方形。求这个正方形的面积。

（提示：此时正方形只有两个顶点在直径上，另外两个在圆弧上）

📌 **解析：**

第一步（构图分析）： 这不是标准的“圆中方”，而是“半圆中方”。但思路相通——正方形要最大，其顶点必须紧贴边界。

第二步（建立关系）： 设正方形边长为 a。如上图，圆心到正方形上边的距离是正方形边长 a，到正方形上顶点的距离是半径 $r = 5$。

第三步（列方程）： 在由圆心、正方形右上顶点、圆心正上方与正方形上边的交点构成的直角三角形中，应用勾股定理：$(\frac{a}{2})^2 + a^2 = r^2$。

第四步（求解）： $\frac{a^2}{4} + a^2 = 25$， $\frac{5}{4}a^2 = 25$， $a^2 = 20$。所以正方形面积 $S = a^2 = 20\ (cm^2)$。

✅ **总结：** “圆中方”思想的拓展。核心仍是寻找图形边界上的最大内接图形，并利用半径（圆心到顶点距离相等）建立方程。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

已知圆的半径是 $4\ cm$，其内最大正方形面积是 ____ cm^2。

已知圆的直径是 $10\ dm$，其内最大正方形面积是 ____ dm^2。

一个面积是 $50\ cm^2$ 的“圆中方”，这个圆的半径是 ____ cm。(结果保留根号)

一个半径为 $3\ m$ 的圆形花坛，中央最大的一块方形土地面积是 ____ m^2。

圆形面积是 $18\pi\ cm^2$，其内最大正方形面积是 ____ cm^2。

正方形面积是 $32\ m^2$，其外接圆面积是 ____ m^2。(结果保留 π)

判断题：同一个圆内，所有内接正方形中，面积最大的是当对角线为直径时。( )

一个“圆中方”中，正方形面积占圆面积的 ____。(用分数和 π 表示)

圆的周长是 $20\pi\ cm$，其内最大正方形面积是 ____ cm^2。

从一张半径为 $10\ cm$ 的圆形卡纸上剪下最大的正方形，剩下边角料的面积是 ____ cm^2。（结果保留 π）

二、奥数挑战

如图，在四分之一圆（半径 R）中作一个最大的正方形，求正方形边长。（用 R 表示）

一个“圆中方”的阴影部分（圆内正方形外）面积是 $27\pi - 54\ cm^2$，求正方形的边长。

已知“圆中方”中，圆的面积比正方形面积大 $28\ cm^2$，求圆的半径。

两个同心圆，小圆内有一个最大正方形，正方形的顶点都在大圆上。若小圆半径为 5，求大圆半径。

一个正方形和一个圆形周长相等。比较它们的面积：$S_{方}$ ____ $S_{圆}$。（填 >, <, =）

在半径为 2 的圆中，随机取一点，该点落在其内最大正方形内的概率是 ____。（结果保留 π）

求“圆中方”阴影部分（圆内正方形外）面积与正方形面积的比值。（用含 π 的式子表示）

用一根铁丝恰好围成一个面积为 S 的圆，如果用这根铁丝改围成一个正方形，哪个面积更大？大多少？（用 S 表示）

在“圆中方”中，连接正方形对角线，求被对角线分割的四个小弓形面积之和与正方形面积之比。

一个运动场中间是边长为 a 的正方形，两端各有一个半圆（直径等于 a）。求整个运动场的面积。

第三关：生活应用（5道）

（AI芯片设计）某AI芯片的核心计算单元是圆形的，为了在内部嵌入一个方形的硅片模块，若圆形单元的直径是 $12\ mm$，这个方形模块的最大面积是多少？

（航天工程）一个圆柱形空间站舱体横截面半径为 4.5 米，工程师需要在舱壁上安装一块最大的方形观察窗，求这块观察窗的面积。

（环保材料）用一块边长为 1 米 的正方形可再生板材，能切割出的最大圆形板材的直径是多少？切割损耗率（边角料占比）是多少？

（网购包装）一个直径为 $30\ cm$ 的圆柱形蛋糕盒，能放进去的方形蛋糕托盘的最大边长是多少？（精确到 $0.1\ cm$）

（艺术设计）设计师在一个半径为 R 的圆形Logo中，想嵌入一个面积最大的正方形图案作为背景。已知正方形图案的颜色覆盖率为整个Logo的 40%，求 R 与正方形边长 a 的关系。

常见疑问 FAQ

专家问答：圆与扇形：圆中方 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难？

答：难点主要有两个。第一是**空间想象障碍**：学生很难在脑海中稳定地构建出“圆内接最大正方形”的准确图形，尤其是对角线是直径这个关键特征。第二是**知识路径依赖**：学生习惯性看到正方形就用“边×边”，但这里的边长 a 与半径 r 的关系 $a = \quad 2r$ 需要借助等腰直角三角形推导，而不是直接给出。阿星的“劈成两个三角形”比喻，正是为了绕开对边长 a 的直接求解，提供一条更直观的“面积化归”路径。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：作用巨大！这是**化归思想**和**模型思想**的绝佳训练。① **几何领域**：它为学习更复杂的“圆内接正多边形”打下了基础（“方”就是正四边形）。你会学到如何利用圆的半径（定长）作为斜边或直角边来求解内接图形。② **代数领域**：公式 $S_{方} = 2r^2$ 和比例关系 $\frac{S_{方}}{S_{圆}} = \frac{2}{\pi}$ 是常数模型，在涉及比例和逆向运算的题目中非常高效。③ **数理结合**：其中的 π 与有理数的对比，是理解“超越数”与代数数关系的启蒙。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：有！请死记硬背这个核心关系链，并像条件反射一样运用：

已知半径 r 求方面积：$S = 2r^2$。

已知直径 d 求方面积：$S = \frac{1}{2}d^2$。

已知方面积 $S_{方}$ 求圆面积：$S_{圆} = \frac{\pi}{2}S_{方}$。

无论题目怎么绕，最终都设法把已知量变形成 r 或 d，然后套用以上公式。阿星的“劈开法”就是这套公式最直观的几何证明。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$S = 2 \times 4^2 = 32$。
$S = \frac{1}{2} \times 10^2 = 50$。
由 $2r^2 = 50$ 得 $r^2 = 25$， $r = 5$。
$S = 2 \times 3^2 = 18$。
由 $\pi r^2 = 18\pi$ 得 $r^2 = 18$， $S_{方} = 2 \times 18 = 36$。
由 $2r^2 = 32$ 得 $r^2 = 16$， $S_{圆} = \pi \times 16 = 16\pi$。
✅。
$\frac{2}{\pi}$。
由 $2\pi r = 20\pi$ 得 $r = 10$， $S_{方} = 2 \times 10^2 = 200$。
圆面积：$\pi \times 10^2 = 100\pi$， 方面积：$2 \times 10^2 = 200$， 剩余：$100\pi - 200$。

二、奥数挑战

设边长为 a。如上图，正方形顶点到圆心的距离为 R。正方形对角线一半为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，圆心到正方形一边的距离为 $\frac{a}{2}$。由勾股定理：$(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = R^2$，解得 $a = \frac{2\sqrt{5}}{5}R$。（需配图辅助理解）
阴影面积 $S_{阴} = S_{圆} - S_{方} = \pi r^2 - 2r^2 = (\pi - 2)r^2 = 27\pi - 54$。所以 $r^2 = \frac{27\pi - 54}{\pi - 2} = 27$， $r = 3\sqrt{3}$， 正方形边长 $a = \sqrt{2}r = 3\sqrt{6}$。
$S_{圆} - S_{方} = \pi r^2 - 2r^2 = (\pi - 2)r^2 = 28$， $r^2 = \frac{28}{\pi - 2}$， $r = \sqrt{\frac{28}{\pi - 2}} = 2\sqrt{\frac{7}{\pi - 2}}$。
小圆内最大正方形的对角线是小圆直径 10，所以正方形边长 $a = 10/\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$。正方形的外接圆（顶点在圆上）半径即正方形对角线一半 5。此即大圆半径。或：大圆半径 R 满足 $2R^2 = (2 \times 5)^2$? 仔细分析，正方形的外接圆圆心与正方形中心重合，半径为中心到顶点的距离。小圆半径是中心到边的距离。由 $r_{顶点}^2 = a^2/2$， $r_{边}^2 = a^2/4$， 所以大圆半径是小圆半径的 $\sqrt{2}$ 倍，为 $5\sqrt{2}$。（此处答案更正为 $5\sqrt{2}$）
设周长为 C， $S_{方} = (\frac{C}{4})^2 = \frac{C^2}{16}$， $S_{圆} = \pi(\frac{C}{2\pi})^2 = \frac{C^2}{4\pi}$。比较 $\frac{1}{16}$ 与 $\frac{1}{4\pi}$， 因 $4\pi \approx 12.56 < 16$， 故 $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16}$， 所以 $S_{圆} > S_{方}$。

第三关：生活应用

直接利用直径：$S = \frac{1}{2} \times 12^2 = 72\ (mm^2)$。
利用半径：$S = 2 \times (4.5)^2 = 2 \times 20.25 = 40.5\ (m^2)$。

正方形内最大圆的直径等于边长 $1\ m$。正方形面积 $1\ m^2$， 圆面积 $\pi \times (0.5)^2 = 0.25\pi \approx 0.785\ m^2$， 损耗率 $1 - 0.25\pi \approx 21.5\%$。

方形托盘要能放入圆柱形盒子的横截面（圆形）内，即求圆内最大正方形的边长。对角线 $d = 30\ cm$， 边长 $a = \frac{d}{2} \approx 21.2\ cm$。

正方形面积 a^2， 圆面积 πR^2。由题意 $a^2 = 40\% \times \pi R^2 = 0.4\pi R^2$。又因为在最大正方形中，$a = \quad 2R$ 或 $a^2 = 2R^2$? 注意，此处的“最大正方形”是圆的内接正方形，固有关系 $a^2 = 2R^2$。代入得 $2R^2 = 0.4\pi R^2$， 即 $2 = 0.4\pi$， $\pi = 5$，这不成立。说明题目中的“正方形”不一定是“内接最大正方形”，而只是面积占比 40% 的任意内接正方形。因此关系应为 $a^2 = 0.4\pi R^2$， 且 $a \leq \quad 2R$。

更多练习题

奥数-几何-方中圆面积

12-19

奥数-几何-容斥求面积

12-19

奥数-几何-毕克定理

12-19

奥数-几何-沙漏模型

12-19

奥数-几何-燕尾模型逆推

12-19

奥数-几何-燕尾模型面积比