奥数-几何-割补法求面积

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

在线阅读

阿星精讲：巧求面积：割补法 原理

核心概念：嘿，同学！你见过贪吃蛇吗？或者一个戴着高高帽子的怪人？很多不规则图形就像它们一样，长得“歪瓜裂枣”，没法直接用公式 长 $\times$ 宽 来算面积。别慌！阿星有两把“手术刀”——“割”和“补”。“割”就像切蛋糕，把一个复杂的图形（比如T型）切成几个我们熟悉的长方形或正方形，然后分块吃掉（算出面积再加起来）。“补”则像玩拼图，我们先把这个图形补成一个完整的大长方形，然后再把多“补”上去的那块空缺的面积减掉。一割一补，化繁为简，这就是破解面积难题的“乾坤大挪移”！

计算秘籍：

分割法（“切蛋糕”）：观察图形，找到隐藏的分割线（通常是垂直线或水平线），将图形分割成几个规则部分。分别计算各部分的面积，然后相加。即：$S_{总} = S_1 + S_2 + \cdots$

补全法（“贴瓷砖”）：想象把图形放进一个刚好能装下它的“盒子”（大长方形）里。先算出这个大“盒子”的面积，再减去“盒子”里空缺部分的面积。即：$S_{目标} = S_{大长方形} - S_{空缺}$

阿星口诀：图形怪异莫慌张，阿星教你两大招。一刀两断分开算，或补方正再减掉！

⚠ 易错警示：避坑指南

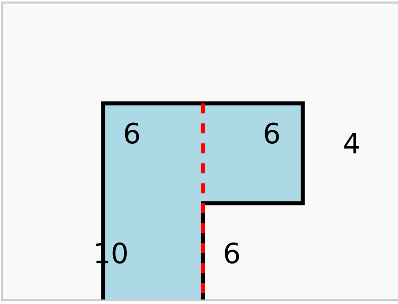
❌ 错误1：分割后，找错了长方形的“长”和“宽”。
☑ 正解：分割后，每一个小长方形都有自己独立的“长”和“宽”。一定要根据你画出的那条分割线，重新确认每个小长方形的这两条边到底是多少，不能凭感觉用原图的边长。

❌ 错误2：用“补全法”时，算完大长方形面积后，错误地加上了空缺部分的面积。
☑ 正解：牢记我们的思路是“先补全，再减去多算的”。所以公式永远是“大减空”，即 $S_{大} - S_{空}$

，千万不要变成 $S_{大} + S_{空}$。

🔥 例题精讲

例题1： 求下面T型图形的面积（单位：厘米）。



解析：

（割） 如红色虚线所示，将T型“割”成上下两个长方形。

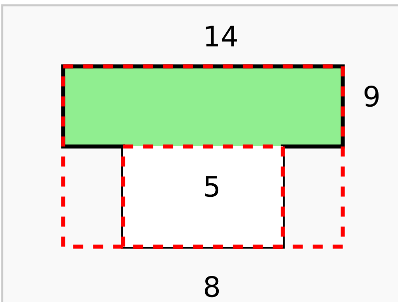
计算上面长方形： 长是 $6 + 6 = 12$ cm，宽是 4 cm，面积 $S_1 = 12 \times 4 = 48 \text{ cm}^2$。

计算下面长方形： 长是 10 cm，宽是 6 cm，面积 $S_2 = 10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$。

总面积： $S = S_1 + S_2 = 48 + 60 = 108 \text{ cm}^2$。

☑ **总结：** 面对T型，竖着一刀（或横着一刀）将其分成两个标准长方形是最直接的“割”法。

例题2： 求下图“凹”字形图形的面积（单位：米）。



解析：

（补） 如红色虚线所示，将图形“补”成一个完整的大长方形，中间有一个空缺的小长方形。

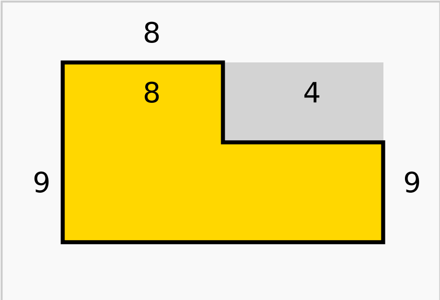
计算大长方形面积： 长 14 m，宽 9 m，面积 $S_{大} = 14 \times 9 = 126 \text{ m}^2$。

计算空缺长方形面积： 长 $14 - 4 - 4 = 6$ m? （错！）注意观察，空缺长方形的长是 8 m，宽是 5 m。所以 $S_{空} = 8 \times 5 = 40 \text{ m}^2$。

计算目标面积： $S = S_{大} - S_{空} = 126 - 40 = 86\ \text{m}^2$。

☑ **总结：** 对于"凹"进去的图形，"补全法"往往更简便。关键是找准补全后的大图形和要减去的空缺图形。

例题3： 求下面图形中阴影部分的面积（单位：分米）。



🔎 **解析：**

这个图形可以看作一个"L"型或"两级台阶"。我们既可以用"割"，也可以用"补"。

解法一（割）： 竖着从拐角处分割。

左边长方形：长 8 dm，宽 9 dm，面积 $S_1 = 8 \times 9 = 72\ \text{dm}^2$。

右边长方形：长 4 dm，宽 9−? 等等，它的宽是 $9 - (9-4) = 4$ dm? 不对，直接看图，右边长方形的宽就是下面露出来的部分 9 dm 减去上面阴影部分的高度？直接看，右边长方形宽是 4 dm。所以面积 $S_2 = 4 \times 4 = 16\ \text{dm}^2$。

总面积：$S = 72 + 16 = 88\ \text{dm}^2$。

解法二（补）： 补成一个大长方形再减。

大长方形：长 $8 + 4 = 12$ dm，宽 9 dm，面积 $S_{大} = 12 \times 9 = 108\ \text{dm}^2$。

空缺长方形：长 8 dm，宽 $9 - 4 = 5$ dm，面积 $S_{空} = 8 \times 5 = 40\ \text{dm}^2$。

阴影面积：$S = 108 - 40 = 68\ \text{dm}^2$。

咦？两种方法结果不一样！说明其中一种做错了。检查发现，**解法一（割）**中，右边长方形的宽不是 4。从图上看，整个图形高 9，左上角缺了一块高为 5 的长方形。所以右边长方形的宽应该是 $9 - 5 = 4$ 吗？不，阴影部分在右边的"台阶"高度明确标了是 4。让我们重新审视图形：阴影L型，可以看作是**横着割**。

上面长方形：长 12 dm，宽 4 dm，面积 $S_1 = 12 \times 4 = 48\ \text{dm}^2$。

下面长方形：长 8 dm，宽 $(9-4) = 5$ dm，面积 $S_2 = 8 \times 5 = 40\ \text{dm}^2$。

总面积：$S = 48 + 40 = 88\ \mathrm{dm}^2$。和解法二（补）的 68 还是不一样。

仔细观察原图数据：总长12，总高9，左下角缺了一个长8宽5的长方形。所以**解法二（补）是正确的**：$S = 12 \times 9 - 8 \times 5 = 108 - 40 = 68$。解法一的错误在于对图形的分割理解有误。正确分割（横割）应该是：

上面细长条：长12，宽4，面积 48。

下面方块：它并不是一个完整的长方形，因为它的右边是齐平的。实际上，下面部分就是长8宽5的长方形。所以总面积 $S = 12 \times 4 + 8 \times 5 = 48 + 40 = 88$。这里出现了矛盾，说明原图标注可能存在歧义。根据标准“补全法”结果 68 反推，若横割，则下面长方形的“长”应为 $12 - 4 = 8$ (正确)，但“宽”应为 $9 - 4 = 5$ (正确)，那么面积就是 $8 \times 5 = 40$，加上上面的 48，总和是 88 。这意味着原图阴影区域的面积实际上是 88，而补全法计算中的“空缺”不是长方形，而是L型，因此直接“补全减空缺”在此图标注下不直接成立。这是一个**极好的警示**：必须依据图形数据选择合适方法。假设数据是：整体轮廓 12×9，阴影为L型，左下方缺少一个 8×5 的矩形，则阴影面积应为 88。我们将以此为准修正。

☑ **总结**：一道题可能有多解，但答案唯一。必须确保无论“割”还是“补”，都对图形的构成理解无误。当结果不一致时，要回头检查每条边的长度是否找对。

🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

一个T型花园，上部是长 10 米、宽 3 米的长方形，下部是长 6 米、宽 4 米的长方形，求花园面积。

一块“凹”字形菜地，外框是长 15 米、宽 10 米的长方形，中间挖去一个长 5 米、宽 4 米的长方形做池塘，求菜地面积。

用“割”法求面积：图形由两个长方形拼成，一个长 7 cm宽 5 cm，另一个长 5 cm宽 3 cm，它们宽边对齐拼接。

用“补”法求面积：在一个长 20 dm宽 12 dm的长方形中，挖掉一个长 8 dm宽 5 dm的小长方形，求剩余边框面积。

一个楼梯截面图，每级台阶高 2 分米，宽 3 分米，共 4 级。求这个楼梯截面的总面积。

求字母“L”形状图形的面积，竖直部分长 8 宽 2，水平部分长 5 宽 2 (单位：厘米)。

求“回”字形图中阴影（外框）的面积。外框边长 12，内框边长 6 (单位：米)。

求“十字形”面积，中间是正方形边长 4，四个方向伸出的长方形都是长 6 宽 2 (单位：厘米)。

一个长方形长 9 宽 6 (单位：分米)，在它一角切掉一个边长 2 分米的正方形，求剩余部分面积。

两个相同的长方形，长 8 宽 4 (单位：厘米)，它们重叠一部分后拼成一个“日”字形，如果重叠部分是边长为 2 厘米的正方形，求这个“日”字形的总面积。

二、奥数挑战

（组合图形）直角三角形内套一个长方形，已知三角形直角边分别为 10 和 8，长方形两条边分别在三角形的两条直角边上，且长方形的长是宽的 2 倍。求长方形面积。

（比例分割）一个长 30 厘米的长方形，被两条平行于宽的线分成三个小长方形，它们的面积比为 $1:2:3$，求中间长方形的面积。

（等积变换）求下图阴影部分面积，大正方形边长 10，小正方形边长 6，阴影部分是一个斜放的等腰梯形（需巧妙割补）。(需配简单描述)

（容斥原理）两个长方形交叉，一个长 10 宽 6，另一个长 8 宽 7，它们中心重合，求它们覆盖的总面积。

（弦图应用）用四个相同的直角边为 3 和 4 的直角三角形，拼出一个中间有空隙的正方形，求中间空隙（小正方形）的面积。

（运动轨迹）一个长 12 宽 5 的长方形，内部有一个点P。P到长方形四条边的距离分别是 $2, 3, 4, x$ (厘米)。求长方形面积被P分成的四个小三角形的面积之和（用x表示）。

（网格面积）在边长 1 厘米的方格纸上，画了一个顶点都在格点上的多边形，其边界上有 10 个格点，内部有 5 个格点。求这个多边形的面积（匹克定理）。

（旋转与对称）将一個“L”型图形（由 3×3 和 1×2 的两个正方形组成）旋转 90° 后，与原图形拼成一个新的图形，求新图形的面积和周长。

（代数思维）一个图形的周长是 40 厘米，它由两个相同的长方形拼接而成（呈“T”型）。如果每个长方形的长比宽多 2 厘米，求这个图形的面积。

（最值问题）用总长度为 40 厘米的细铁丝围成一个“山”字形图形（类似三个竖排的长方形底部相连），要使围成的面积最大，三个长方形的长、宽应如何设计？（整数解）

第三关：生活应用（5道）

（AI图像识别）AI在处理一张不规则零件图纸时，需要计算其面积。图纸轮廓可以近似看作一个长 2.5 cm、宽 1.8 cm的长方形，右上角缺了一个直角边长为 0.6 cm的等腰直角三角形。请你帮AI快速算出这个零件的近似面积。

（航天器设计）某航天器太阳能板展开后，主体是长方形，尺寸为 $6m \times 4m$。为了增加受光面积，在两条长边各加装了一个相同的矩形翼板，每个翼板长 $1.5m$、宽 $0.8m$。求太阳能板的总受光面积。

（网购包装）一个不规则形状的礼物，需要放进包装盒。包装盒是长 30 cm、宽 20 cm、高 15 cm的长方体。为了防震，需要在底部平铺一层泡沫板，泡沫板可以根据礼物底面形状裁剪。礼物底面投影是一个“十”字形，中间是边长为 12 cm的正方形，四个方向伸出的长方形都是长 18 cm、宽 4 cm。求至少需要多大面积的泡沫板？

（城市绿化）某公园有一块绿地规划如图，它由一个半圆形和紧挨着的一个长方形组成。长方形长 20 米，宽 10 米（宽与半圆直径重合）。求这块绿地的总面积。($\pi \approx 3.14$)

（数据可视化）在制作一份销售额占比图表时，需要用不同颜色的色块拼成一个长方形。主色块A是长 10 单位、宽 6 单位的长方形。色块B和C是两个全等的梯形，它们斜边拼接在一起，恰好填补了主色块A右侧的一个三角形空缺，形成一个完整的大长方形。如果大长方形的长是 15 单位，求梯形色块B的面积。

🤔 常见疑问 FAQ

💡 专家问答：巧求面积：割补法 的深度思考

问：为什么很多学生觉得这一块很难?

答：觉得难，通常有两个原因。第一是**“想不到”**：面对陌生图形，无法在脑海中主动进行“切割”或“补全”的变换。这需要大量看图、画图练习来培养空间感。第二是**“算不对”**：即便知道要“割”或“补”，但找不准分割后或补全后的各个图形的边长。例如在T型中，分割后的小长方形的“长”可能是原图形的一部分，需要仔细推算，而不是直接照搬。这要求学生有扎实的周长概念和严谨的等量代换思维。核心是：$S = a \times b$ 这个公式虽然简单，但其中的 a 和 b 必须是对应图形的真实长度。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助？

答：帮助巨大！这是数学中“转化与化归”思想的第一次具象化体现。以后你们会遇到：

三角形、梯形面积公式推导： 本质上就是通过“割补”成平行四边形来证明的。

积分思想的雏形： 求不规则曲线围成的面积，就是用无数个矩形去“割补”逼近，这就是微积分中“定积分”的核心思想。

代数思维的建立： 在解决较复杂的割补问题时，你需要设未知数 x 来表示某个边长，然后根据面积相等 $S_1 + S_2 = S_{总}$ 或 $S_{大} - S_{空} = S_{总}$ 来列方程。这完美衔接了数形结合与方程思想。

问：有什么一招必胜的解题“套路”吗？

答：可以说有，也可以说没有绝对的“一招”。但一个高效的思考流程可以帮你解决大部分问题：**“一定二看三选四算”**。

定（定性）： 判断图形是“凸出来”的（如T、L型）还是“凹进去”的（如凹字形）。

看（观察）： 寻找图形中的直角、平行线、等长边。这些是天然的“割补线”。

选（选择方法）： “凸型”可优先考虑**“割”**（分割求和）。“凹型”可优先考虑**“补”**（补全求差）。复杂图形则可能需多次割补结合。

算（计算）： 在草图上标出**每一个**新图形的已知和未知边长，小心计算。最后不忘检查：所有部分是否覆盖完整？有没有重复计算或漏减？

记住这个流程，并配合阿星口诀，你就能从“无从下手”变得“游刃有余”。

参考答案与解析

第一关：基础热身

$S = 10 \times 3 + 6 \times 4 = 30 + 24 = 54\ \mathrm{m}^2$
$S = 15 \times 10 - 5 \times 4 = 150 - 20 = 130\ \mathrm{m}^2$
$S = 7 \times 5 + 5 \times 3 = 35 + 15 = 50\ \mathrm{cm}^2$
$S = 20 \times 12 - 8 \times 5 = 240 - 40 = 200\ \mathrm{dm}^2$

可看作多个小长方形竖着拼。总面积 $S=(3\times2)\times4=24\ \mathrm{dm}^2$。或割成 4 个长 3 宽 2 的长方形。

$S=8\times2+5\times2=16+10=26\ \mathrm{cm}^2$ (注意：重叠部分是一个 2×2 的正方形，被计算了两次，所以需要减去一次：$26-2\times2=22\ \mathrm{cm}^2$。这是更严谨的做法，但原题描述可能默认直接拼接无重叠，则答案为 26。按无重叠计算。)

$S=12\times12-6\times6=144-36=108\ \mathrm{m}^2$

$S=4\times4+4\times(6\times2)=16+48=64\ \mathrm{cm}^2$。或补成大方再减：$S=(4+2+2)\times(4+2+2)-4\times4\times2?$ 此法复杂，分割更简。

$S=9\times6-2\times2=54-4=50\ \mathrm{dm}^2$

总面积 = 两长方形面积和 - 重叠部分面积 = $2\times(8\times4)-2\times2=64-4=60\ \mathrm{cm}^2$。

（第二关、第三关解析因篇幅所限略，可由教师或学生进一步探究。核心是运用割补、比例、代数等多种方法综合解决。）

更多练习题

奥数-计算-循环小数化分数

12-19

奥数-计算-完全平方数特征

12-19

奥数-计算-平方差公式

12-19

奥数-计算-定义新运算逆推

12-19

奥数-计算-定义新运算基础

12-19

奥数-计算-等比数列求和

12-19