# 奥数-几何-任意四边形蝴蝶

刚刚　0 次阅读

本资料为**小学数学** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

## 在线阅读

### 阿星精讲：蝴蝶模型：任意四边形 原理

**核心概念：**大家好，我是阿星！想象一下，一个**任意四边形**就像一只张开翅膀的蝴蝶，它的两条**对角线**就是蝴蝶的身体，交点（我们叫它O点）是蝴蝶的身体中心。这两条对角线把四边形分成了四个三角形，就像蝴蝶的**四个翅膀**：左翅、右翅、上翅、下翅。我们的口诀“上×下 = 左×右”说的可不是面积哦，而是**对角线被交点O分成的四段线段长度的乘积关系**。也就是说，蝴蝶“身体”(对角线）上相邻两段的乘积相等！

**计算秘籍：**

画出任意四边形 $ABCD$，连接对角线 $AC$ 与 $BD$，交于点 $O$。

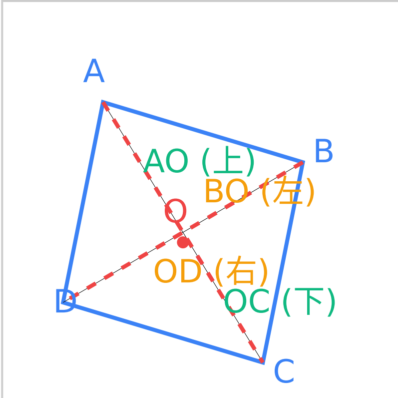
观察对角线 $AC$：被 $O$ 分成 $AO$ (上) 和 $OC$ (下)。

观察对角线 $BD$：被 $O$ 分成 $BO$ (左) 和 $OD$ (右)。

应用口诀：$AO \times OC = BO \times OD$，即 上 $\times$ 下 $=$ 左 $\times$ 右。

已知其中任意三段，就能求出第四段。例如，已知 $AO = 5$， $OC = 4$， $BO = 2$， 求 $OD$。根据公式：$5 \times 4 = 2 \times OD$， 所以 $OD = (5 \times 4)/2 = 10$。

**阿星口诀：**任意四边对角线，交点翅膀分四片。面积比难可别愁，上乘下等于左乘右。(注：本口诀核心指对角线分成的**线段比例关系**，是推导面积比的基础。)




## ⚠ 易错警示：避坑指南

❌ 错误1：**记错线段对应关系**。随便找两个乘积就认为相等。

☑ 正解：**必须是对角线上相邻的两段**。口诀“上×下”指的是同一条对角线上被分成的两段；“左×右”指的是另一条对角线上被分成的两段。

❌ 错误2：**把线段乘积公式当成面积公式直接套用**。认为三角形面积 $S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \times S_{\triangle AOD}$。

☑ 正解：**面积比例关系需要推导**。面积比等于共线线段比的乘积。例如，$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{OC}$，$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{AO}{OC}$，所以四个三角形面积成比例。但直接“上×下=左×右”是对线段长度而言的，这是面积比例关系的源头。

## 🔥 例题精讲

**例题1**：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$、$BD$ 交于 $O$ 点。已知 $AO = 6\ cm$，$OC = 4\ cm$，$BO = 3\ cm$，求 $OD$ 的长度。

**解析**：

识别模型：这是一个标准的任意四边形蝴蝶模型。

标出线段：在 $AC$ 上，$AO = 6$ (上)，$OC = 4$ (下)。在 $BD$ 上，$BO = 3$ (左)，$OD = ?$ (右)。

套用口诀“上×下 = 左×右”：$6 \times 4 = 3 \times OD$。

计算： $24 = 3 \times OD$， 所以 $OD = 24/3 = 8\ cm$。

✅ **总结：**直接对应，套用公式。关键是找准“上下左右”四段线段。

**例题2：**如图，四边形对角线交于 $O$， $S_{\triangle AOB} = 9$， $S_{\triangle BOC} = 6$， $S_{\triangle COD} = 12$， 求 $S_{\triangle AOD}$ 。

📌 **解析：**

此题为面积应用。由蝴蝶模型线段关系可知，面积比满足： $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{OC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$。

同理， $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}} = \frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$。

已知 $S_{\triangle COD} = 12$， 所以 $S_{\triangle AOD} = \frac{3}{2} \times S_{\triangle COD} = \frac{3}{2} \times 12 = 18$。

（验证线段积）：由面积比得 $\frac{AO}{OC} = \frac{3}{2}$， 设 $AO = 3k$， $OC = 2k$。 同理， $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOD}} = \frac{BO}{OD} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$， 设 $BO = m$， $OD = 2m$。 则 $AO \times OC = 3k \times 2k = 6k^2$， $BO \times OD = m \times 2m = 2m^2$。 两者由模型可知相等，即 $6k^2 = 2m^2$， $m^2 = 3k^2$， 这与面积比一致。

✅ **总结：**从面积比反推线段比，再利用共边模型求另一个面积。线段乘积关系是隐藏的桥梁。

**例题3：**（方程思想）在四边形 $ABCD$ 中，对角线交于 $O$。已知 $AO$ 是 $OC$ 长度的 1.5 倍，且 $BO$ 比 $OD$ 短 $2\ cm$。若 $BD$ 总长为 $14\ cm$， 求 $AC$ 被 $O$ 分成的两段长度各是多少?

📌 **解析：**

设未知数：设 $OC = x\ cm$， 则 $AO = 1.5x\ cm$。 设 $BO = y\ cm$， 则 $OD = (y + 2)\ cm$。

利用线段和：$BD = BO + OD = y + (y + 2) = 14$。 解得 $2y + 2 = 14$， $y = 6$。 所以 $BO = 6$， $OD = 8$。

利用蝴蝶模型核心公式：$AO \times OC = BO \times OD$。 代入： $(1.5x) \times x = 6 \times 8$。

计算： $1.5x^2 = 48$， $x^2 = 32$， $x = \quad 32 = 4 \quad 2\ (cm)$。

最终： $OC = 4 \quad 2\ cm$， $AO = 1.5 \times 4 \quad 2 = 6 \quad 2\ cm$。

✅ **总结：**当条件复杂时，设未知数列方程是通法。将“线段和”与“线段积”两个条件结合，轻松破解。

## 🚀 阶梯训练

### 第一关：基础热身（10道）

四边形中对角线交于 $O$，$AO=3$，$OC=7$，$BO=4.5$，求 $OD$。

四边形中对角线交于 $O$，$AO=8$，$OD=5$，$BO=4$，求 $OC$。

若 $AO:OC=2:3$，$BD=20$，且 $BO:OD=3:2$，求 $AO$ 和 $OC$ 的长度。

已知 $AO\times OC=60$，$BO=5$，求 $OD$。

$S_{\triangle AOB}=12$，$S_{\triangle BOC}=8$，$S_{\triangle COD}=16$，求 $S_{\triangle AOD}$。

$S_{\triangle AOD}=15$，$S_{\triangle COD}=25$，$S_{\triangle BOC}=10$，求 $S_{\triangle AOB}$。

根据图示，快速说出 $AO:OC$ 与哪两个三角形的面积比相等?

判断题：在任意四边形蝴蝶模型中，一定有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}$。（ ）

若 $BO=2OD$，请写出 $AO$ 与 $OC$ 的比例关系。

已知 $AC=15$，且 $AO$ 是 $OC$ 的 2 倍，$BO=6$，求 $OD$。

## 二、奥数挑战

四边形 $ABCD$ 面积为 180，对角线分出的四个三角形中，$S_{\triangle AOB}=20$，$S_{\triangle BOC}=30$，求 $S_{\triangle COD}$ 和 $S_{\triangle AOD}$。

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$M$、$N$ 分别是对角线 $AC$、$BD$ 的中点。若 $AB=8$，$CD=12$，利用蝴蝶模型思想，判断 $MN$ 的取值范围。

在四边形 $ABCD$ 中，$S_{\triangle AOB}=4$，$S_{\triangle BOC}=6$，$S_{\triangle AOD}=9$，求四边形 $ABCD$ 的总面积。

已知 $AO:OC=3:5$，$S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOC}=14$，求 $S_{\triangle COD}$。

将任意四边形的每条边三等分，连接对边分点，构成一个小四边形。求证：这个小四边形的对角线交点与原四边形对角线交点重合，并讨论其线段比例关系。

四边形对角线互相垂直，交于 $O$。已知 $AO=3$，$OC=5$，$BD=10$，求四边形面积。

若 $S_{\triangle AOB}\times S_{\triangle COD}=S_{\triangle BOC}\times S_{\triangle AOD}$，能否推出四边形是梯形？为什么?

在四边形 $ABCD$ 中，$AC$ 与 $BD$ 交于 $O$，且 $AB//CD$。此时蝴蝶模型的线段积关系还成立吗？它与梯形蝴蝶模型有何异同?

已知 $AO+OC=16$， $BO\times OD=48$， 且 $AO$ 与 $OC$ 的长度均为整数，求所有可能的 $AO$ 、 $OC$、 $BO$、 $OD$ 组合（考虑对称性）。

设 $P$ 为四边形 $ABCD$ 内一点，连接 $PA,PB,PC,PD$。在 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 中，能否构造出“蝴蝶模型”？请阐述你的想法。

#### 第三关：生活应用（5道）

**（分蛋糕）**一块任意形状的四边形蛋糕，阿星想从两个对角切下两条直线（对角线），分给四个小朋友。他想让拿到相邻两块（有公共边）蛋糕的小朋友，其蛋糕大小比例相同。利用蝴蝶模型原理，他该如何确定下刀的交点位置?

**（AI视觉）**一个AI程序在分析摄像头画面中的一个四边形窗户（由于透视，不是平行四边形）。它测出了窗户“骨架”(对角线）在图像中被交点分成的四段像素长度分别为： $80$， $60$， $48$， ?。AI需要验证测量是否准确。请帮它算出第四段像素长度，并说明验证原理。

**（结构力学）**一个简易的四边形伸缩支架，其关节处（对角线交点 $O$ ）的受力与连杆长度有关。工程师发现，当满足 $AO\times OC=BO\times OD$ 时，支架在 $O$ 点处的应力分布最均匀。已知三根连杆 $AO=1.2m$， $BO=0.8m$， $OD=1.5m$， 求另一根连杆 $OC$ 的设计长度。

**（网购包装）**一个不规则四边形的扁平礼盒，需要用两条丝带十字交叉固定（沿对角线）。为了节省丝带，交叉点必须固定在某个特定位置，使得两条丝带被交点分成的四段长度满足“上×下=左×右”的奇妙关系。如果一段丝带总长 $60cm$， 被分成长度为 $15cm$ 和另一段；另一条丝带被分成 $20cm$ 和 $25cm$ 两段。请问这个交叉点存在吗？请通过计算说明。

**（公园设计）**一个四边形花坛 $ABCD$， 中心点 $O$ 是一个喷泉。由 $O$ 到四个顶点的路径将花坛分成四个区域，分别种植四种花卉。园丁记录下四个区域的面积比为 $4:6:9:$?。为了采购花苗，他需要知道第四块区域的面积比例是多少？这用到了蝴蝶模型的什么结论?

## 🤔 常见疑问 FAQ

### 💡 专家问答：蝴蝶模型：任意四边形 的深度思考

**问：为什么很多学生觉得这一块很难?**

答：难点在于**混淆层次**。蝴蝶模型有三层：1. **线段积关系** $AO\times OC=BO\times OD$，这是最根本的，由共边三角形面积比推导而来。2. **面积比例关系**，如 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AO}{OC}$。3. 在特

定条件（如梯形）下衍生的**面积积关系**。学生常常跳过第1层，直接记第2或第3层的结论，导致条件不满足时出错。记住，万变不离其宗："对角线交点分线段，上乘下等于左乘右"。

**问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助?**

答：这是**比例思维**和**转化思想**的绝佳训练场。1. **为相似三角形奠基**：通过面积比推导线段比，是相似三角形证明的"前奏"。2. **贯通几何与代数**：将几何关系 $AO \times OC = BO \times OD$ 转化为方程，是解析几何思想的雏形。3. **提升复杂图形分解能力**：它是处理不规则图形面积问题的核心工具之一，与等高模型、燕尾模型并重。可以说，熟练掌握它，你就拿到了解锁初中平面几何综合题的一把重要钥匙。

**问：有什么一招必胜的解题"套路"吗?**

答：有！面对涉及四边形对角线的题目，按此三步：

**标交点**：立刻画出对角线，标出交点 $O$。

**找四段**：在两条对角线上，分别标出被 $O$ 分成的四段线段，心中默念"上、下、左、右"。

**列关系**：写下核心等式 $AO \times OC = BO \times OD$，将已知数或比例代入。

如果是面积问题，则先利用 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{OC}$ 等关系，将面积比转化为线段比，再回到步骤3的核心等式。这个"先标线，后列式"的套路，能解决80%的相关问题。

参考答案与解析

**第一关：基础热身**

$3 \times 7 = 4.5 \times OD$，$OD = 21/4.5 = \frac{14}{3}$。
$8 \times OC = 4 \times 5$，$OC = 20/8 = 2.5$。
由 $BD = 20$，$BO : OD = 3 : 2$，得 $BO = 12$，$OD = 8$。设 $AO = 2k$，$OC = 3k$，由 $2k \times 3k = 12 \times 8$，$6k^2 = 96$，$k = 4$。故 $AO = 8$，$OC = 12$。
$60 = 5 \times OD$，$OD = 12$。

$\frac{AO}{OC}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$， $S_{\triangle AOD}=\frac{3}{2}\times S_{\triangle COD}=\frac{3}{2}\times 16=24$。
$\frac{AO}{OC}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$， $S_{\triangle AOB}=\frac{3}{5}\times S_{\triangle BOC}=\frac{3}{5}\times 10=6$。
$AO:OC=S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOD}:S_{\triangle COD}$。
错误。只有在对角线相互平分（如平行四边形）或特定比例下才可能相等，一般情况下不相等。
由 $BO=2OD$ 得 $BO\times OD=2OD^2$。 设 $AO\times OC=k$， 则 $k=2OD^2$。 但 $AO$ 与 $OC$ 的比例无法唯一确定，仅知它们的乘积是定值。所以 $AO:OC$ 可以是任意值，只要乘积固定。
$AC=15$， $AO=2OC$， 得 $AO=10$， $OC=5$。 $10\times 5=6\times OD$， $OD=50/6=25/3$。
**（第二关、第三关解析因篇幅所限，在此提供关键思路）**

**第二关关键思路：**

由面积比求线段比，再求其他面积。总面积 $=20+30+45+30=125?$ 等等，需要计算：设 $S_{\triangle AOD}=x$， $S_{\triangle COD}=y$。 由 $20:30=x:y$ 且 $20+y+30+x=180$， 联立求解。
连接各边中点，构造中位线。$MN$ 与 $AB$、$CD$ 的一半有关，利用三角形两边之和大于第三边推导。
由 $4:6=9:S_{\triangle COD}$ 求 $S_{\triangle COD}=13.5$， 总面积 $=4+6+9+13.5=32.5$。
设 $AO=3a$， $OC=5a$。 由面积关系列方程，注意利用共高三角形面积比等于底边比。
使用坐标法或梅涅劳斯定理证明交点重合。线段比例关系变为更复杂的倍数关系。
面积 $=\frac{1}{2}\times AC\times BD=\frac{1}{2}\times(3+5)\times 10=40$。（对角线垂直时，四边形面积公式）
不能。该等式是任意四边形蝴蝶模型的**推论**（由面积比例关系推导得出），本身成立，不能反推特殊形状。
成立。梯形是任意四边形的特殊情况，其蝴蝶模型线段积关系依然成立。特殊之处在于上下底平行，导致 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$， 且面积存在平方关系。
由 $AO+OC=16$， $AO\times OC=48$， 联立，$AO$、$OC$ 是方程 $t^2-16t+48=0$ 的两根，解得 $AO=12$， $OC=4$ 或 $AO=4$， $OC=12$。 对应 $BO\times OD=48$， 则 $BO$、$OD$ 为乘积为 48 的正整数对，如 $(6,8)$， $(8,6)$， $(4,12)$ 等。考虑对称性（交换 $A$、$C$ 或 $B$、$D$ 角色），有多组解。
可以。分别观察四边形 $PABC$ 和 $PADC$， 在其中寻找对角线交点，并应用模型。这是一个思维拓展题。

**第三关关键思路：**

让对角线交点 $O$ 满足 $AO:OC=BO:OD$， 这样四个三角形面积就成比例，相邻两块（如 $AOB$ 与 $BOC$）面积比就等于 $AO:OC$。
第四段应为 $100$。 原理： $80\times 60=48\times ?$， $?=100$。 AI可以用此验证四边形透视投影的合理性。

$1.2 \times OC = 0.8 \times 1.5$， $OC = 1.0\ m$。
第一条丝带：一段 15， 则另一段为 $60 - 15 = 45$。 若“上×下”指 $15 \times 45 = 675$。 第二条丝带： $20 \times 25 = 500$。 $675 \neq 500$， 故不存在这样的交叉点使其满足关系。
设面积比为 $4:6:9:x$。 根据蝴蝶模型面积比例关系，有 $4:6 = 9:x$， 解得 $x = 13.5$。 第四块比例为 13.5。 用到了“同一条对角线分出的两个三角形面积比相等”的结论。

更多精彩内容请访问 **星火网 www.xinghuo.tv**

PDF 文件正在生成中，请稍后再来...

## 更多练习题

奥数-几何-蝴蝶模型份数

12-19

奥数-几何-梯形蝴蝶模型

12-19

奥数-几何-鸟头模型应用

12-19

奥数-几何-鸟头模型公式

12-19

奥数-几何-矩形一半模型

12-19

奥数-几何-一半模型基础

12-19