交点坐标怎么求？联立方程组解法与数形结合深度解析专项练习题库

适用年级 初二 | 难度等级 ☆☆☆ | 资料格式 PDF 可打印 | 最近更新 2025-12-21

1. 阿星精讲：交点坐标 原理

- **核心概念：** 想象一下，两条直线就像两个在平面世界里行走的人，他们的**解析式**就是各自的“人生轨迹说明书”。当他们**相遇**（相交）的那一刻，这个**交点**的坐标 (x, y)，必须同时满足两个人的“说明书”。这就像我们同时拿着两份说明书去找一个点，这个点必须符合两份说明书的所有要求。阿星精辟地总结道：**“联立求解。两条直线的交点，就是这两个解析式组成的二元一次方程组的解。”** 所以，求交点坐标，本质上就是解一个由 $y = k_1x + b_1$ 和 $y = k_2x + b_2$ 组成的方程组。

- **计算秘籍：**
  1. **设方程：** 明确两条直线的解析式，例如直线 $l_1 : y = 2x + 1$，直线 $l_2 : y = -x + 4$。
  2. **联立：** 因为它们相交，所以在交点处 y 值相等。联立方程：
  $$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$
  3. **求解：** 解这个二元一次方程组。将两式相等：$2x + 1 = -x + 4$，解得 $x = 1$。再将 $x = 1$ 代入任一方程，得 $y = 3$。
  4. **得交点：** 所以交点 P 的坐标为 $(1, 3)$。

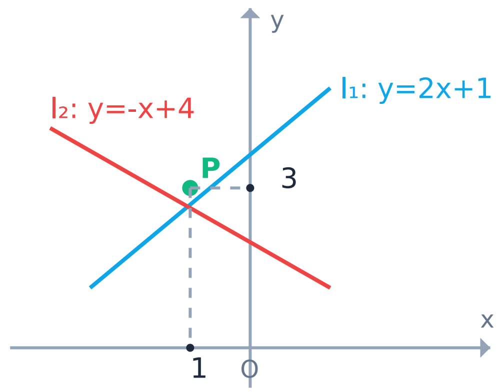
- **阿星口诀：**“联立方程解相交，代数几何双通道。横纵坐标同时求，交点就在解里头。”

2. 📐 图形解析

“联立求解”在图形上的直观体现：交点的横坐标 x 和纵坐标 y，正是两条直线在坐标平面中“故事线”的交汇点。

交点坐标公式推导（理解用）：对于 $l_1 : y = k_1x + b_1$ 和 $l_2 : y = k_2x + b_2$ $(k_1 \neq k_2)$，联立后得 $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$，解得交点的：

$$x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \quad y = \frac{k_1b_2 - k_2b_1}{k_1 - k_2}$$



如图，交点 P 的坐标 $(1, 3)$ 同时满足：在直线 l_1 上，$3 = 2 \times 1 + 1$；在直线 l_2 上，$3 = -1 + 4$。这正是“联立方程组解”的几何可视化。

3. ⚠ 易错警示：避坑指南

- ❌ **错误1：**只求出 x 就以为完事了，忘记回代求 y。 → ☑ **正解：**交点是一个点，必须拥有横坐标 x 和纵坐标 y 两个值。解出 x 后，

务必代入**任意一个**原始方程求出 y。

- ❌ **错误2**：联立方程后，移项合并同类项时符号出错。 → ☑️ **正解**：遵循“同侧同号，异侧异号”的移项法则，慢一点，每一步都检查。例如，从 $2x+1=-x+4$ 移项得 $2x+x=4-1$，而不是 $2x-x=4+1$。

4. 🔥 三例题精讲

例题1：基础直给 求直线 $y=\frac{1}{2}x-3$ 与 $y=-2x+6$ 的交点坐标。

📌 **解析：**

1. **联立方程组：**

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-3 & (1) \\ y=-2x+6 & (2) \end{cases}$$

2. **代入消元：** 因为两个 y 相等，所以 $\frac{1}{2}x-3=-2x+6$。
3. **求解 x：** $\frac{1}{2}x+2x=6+3$， $\frac{5}{2}x=9$， 解得 $x=\frac{18}{5}$。
4. **求解 y：** 代入(2)式： $y=-2\times\frac{18}{5}+6=-\frac{36}{5}+\frac{30}{5}=-\frac{6}{5}$ 。

☑️ **总结：**严格按照“联立-消元-求解”四步法，计算分数时细心通分。

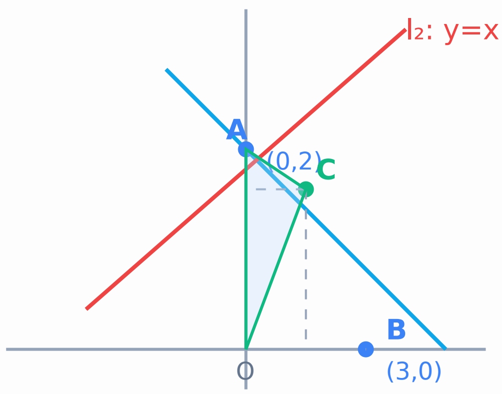
例题2：含参思维 已知直线 $y=3x+m$ 与 $y=-x+5$ 的交点在 x 轴上，求 m 的值及交点坐标。

📌 **解析：**

1. 抓住关键信息：交点在 x 轴上，则交点纵坐标 $y=0$。
2. 将 $y=0$ 代入较简单的方程 $y=-x+5$，得 $0=-x+5$，解得 $x=5$。所以交点可设为 $(5,0)$。
3. 因为该交点也在直线 $y=3x+m$ 上，所以将其坐标代入：$0=3\times5+m$。
4. 解得 $m=-15$。

✅ **总结：** 利用交点坐标的特殊性（如在坐标轴上），可以反向确定参数。先求已知信息足的直线，再代入另一条直线求参。

例题3：几何应用 在平面直角坐标系中，直线 l_1 过点 $A(0,2)$ 和 $B(3,0)$，直线 l_2 的解析式为 $y=x$。求两直线交点 C 的坐标，并计算 $\triangle AOC$ 的面积。



📌 **解析：**

1. **求 l_1 解析式：** 设 $l_1: y = kx + b$，代入 $A(0,2), B(3,0)$。
$$\begin{cases} 2 = k \cdot 0 + b \\ 0 = 3k + b \end{cases} \Rightarrow b = 2, k = -\frac{2}{3}$$
所以 $l_1: y = -\frac{2}{3}x + 2$。
2. **联立求交点 C：** 联立 l_1 与 $l_2 (y = x)$。
$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}x + 2$$
解得 $\frac{5}{3}x = 2$，$x = \frac{6}{5}$，则 $y = \frac{6}{5}$。所以 $C(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$。
3. **求 $\triangle AOC$ 面积：** 以 OA 为底，$OA = 2$。C 到 y 轴（即线段 OA 所在直线）的距离为 C 点的横坐标 $\frac{6}{5}$，此即高。
$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} \times OA \times |x_C| = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$$

✅ **总结：** 综合性题目。先利用两点求直线解析式，再联立求交点，最后结合几何图形特征（选取合适的底和高）求面积。

5. 🚀 阶梯训练

第一关：基础热身（10道）

1. 求直线 $y = 5x - 7$ 与 $y = -3x + 1$ 的交点坐标。
2. 求直线 $y = \frac{3}{4}x$ 与 $y = -2x + 11$ 的交点坐标。

3. 直线 $y = 10$ 与 $x = -4$ 的交点坐标是?

4. 联立方程 $y = x - 5$ 和 $y = 7$，求交点。

5. 直线 $y = 2x + 3$ 与 $y = 2x - 5$ 有交点吗? 为什么?

6. 求直线 $y = -x$ 与 $y = 0.5x + 6$ 的交点。

7. 已知两直线交点为 $(2, -1)$，其中一条为 $y = 4x - 9$，求另一条直线 $y = kx + 3$ 的 k 值。

8. 判断点 $(3, 4)$ 是否是直线 $y = 2x - 2$ 和 $y = -x + 7$ 的交点。

9. 求直线 $x + y = 5$ 与 $2x - y = 1$ 的交点坐标。（提示：先把方程变形为 $y = \ldots$ 的形式）

10. 直线 $y = 3$ 与 $y = -2x + 3$ 相交于点 P，求 P 点坐标。

第二关：中考挑战（10道）

1. 若直线 $y = 2x + a$ 与 $y = -x + b$ 的交点坐标为 $(1, 2)$，求 a, b 的值。

2. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = -2x$ 平行，且与直线 $y = x + 3$ 交于 y 轴上同一点，求该一次函数解析式。

3. 直线 $l_1 : y = k_1x + b_1$ 与 $l_2 : y = k_2x + b_2$ 的图象如图所示，则方程组 $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ 的解是?

4. 已知点 $P(m, n)$ 是直线 $y = -x + 2$ 和 $y = 2x - 1$ 的交点，求 $m + n$ 的值。

5. 若关于 x 的方程 $4x - 2 = 3x + 1$ 的解是两条直线 $y = 4x - 2$ 与 $y = 3x + 1$ 交点的横坐标，求其纵坐标。

6. 直线 $y = 2x - 1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A, B 两点，直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴、y 轴分别交于 C, D 两点，求两直线交点 P 的坐

标及四边形 $OBPC$ 的面积。

7. 已知直线 l 经过点 $(0,-3)$ 且与直线 $y=\frac{1}{3}x$ 相交于点 $(a,1)$，求直线 l 的解析式。

8. 若三条直线 $y=2x-3$, $y=x-1$, $y=kx+2$ 相交于同一点，求 k 的值。

9. 在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与坐标轴分别交于 A,B 两点，点 C 在 x 轴上，且 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，求点 C 的坐标。（提示：先求交点，再分类讨论）

10. 已知一次函数 $y=-x+m$ 与 $y=nx+2$ 的图象交于点 $P(2,-1)$，则关于 x,y 的方程组 $\begin{cases} x+y=m \\ nx-y=-2 \end{cases}$ 的解是?

第三关：生活应用（5道）

1. **（球场定位）** 在足球场上，小明从点 $A(0,0)$ 沿直线 $y=0.8x$ 带球，小刚从点 $B(40,0)$ 沿直线 $y=-0.5x+20$ 拦截。他们的路径会相交吗？如果会，求交点坐标（单位：米）。

2. **（消费决策）** 某打车平台计费：甲方案：起步价10元，每公里2元；乙方案：无起步价，每公里2.5元。设行驶距离为 x 公里，车费为 y 元。写出两种方案的函数解析式，并求出在多少公里时两种方案车费相同?

3. **（简易测量）** 地面上有两点 A 和 B，由于障碍无法直接测量距离。测量员在远处选定一点 O，测得 OA 方向与正北夹角为30度，距离50米；OB 方向与正北夹角为120度，距离30米。若以 O 为原点，正东为x轴正方向，正北为y轴正方向，1米为单位长度，求直线 OA 与 OB 解析式及交点 A、B 的坐标（用含根号的式子表示），进而利用坐标公式求 AB 距离。

4. **（桥梁设计）** 如图，一个拱形桥的侧面轮廓，一部分是线段 AB，一部分是抛物线。已知 $A(-20, 0)$，$B(20, 0)$，线段 AB 的解析式为 $y = 0$。抛物线顶点为 $C(0, 15)$。求连接点 B 和顶点 C 的直线 BC 的解析式，以及直线 BC 与水平线 $y = 5$ 的交点 D 的横坐标（用于计算支撑柱位置）。

5. **（航线规划）** 无人机甲从基地 $O(0, 0)$ 出发，沿直线 $y = 200$（水平飞行）向目标飞行。无人机乙从 $P(1000, 0)$ 同时出发，需在途中与甲会合进行数据交换。乙应沿怎样的直线 $y = kx$（直接飞向会合点）飞行，才能与甲在甲出发后10秒时相遇？（假设甲的速度是30米/秒，乙的速度是40米/秒，时间单位为秒，坐标系单位：米）

6. 🤔 常见疑问 FAQ

💡 **专家问答：交点坐标 的深度思考**

问：为什么很多学生觉得这一块很难?

答：难点往往在于**思维切换**。学生需要将“两条线相交”这个**几何图形问题**，瞬间转化为“解二元一次方程组”这个**代数计算问题**。阿星的比喻“联立求解”就是为了架起这座桥梁。如果对方程组的解法（代入消元法、加减消元法）不熟练，或者对函数解析式理解不深，就会在这里卡住。关键是要理解：交点的“双重身份”——它既在直线 l_1 上，也在直线 l_2 上，所以它的坐标 (x, y) 必须同时满足两个方程 $y = f_1(x)$ 和 $y = f_2(x)$。

问：学习这个知识点对以后的数学学习有什么帮助?

答：这是**数形结合思想**的第一次关键实践，是未来数学学习的基石。

- **高中：**会延伸到求曲线交点（如直线与抛物线 $y = x^2$ 的交点），本质是解方程组 $\begin{cases} y = kx + b \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$，这时可能得到一元二次方程。
- **线性代数：**二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的“解”的几何意义，就是空间中两条直线（或平面）的“交点”(或交线)。
- **编程与优化：**在计算机图形学、游戏碰撞检测、线性规划求最优解等问题中，“求交点”或“判断是否有交点”是核心操作之一。

问：有什么一招必胜的解题"套路"吗?

答：有！严格遵循以下**标准化流程**，可解绝大多数题目：
1. **判（判断形式）**：明确给出的两条直线解析式，是否为 $y = kx + b$ 形式。如果不是（如 $Ax + By = C$），先变形。
2. **联（联立方程）**：写出方程组 $\begin{cases} y = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 或直接令两个 y 的表达式相等。
3. **解（解方程）**：解关于 x 的一元一次方程。
4. **代（回代求 y）**：将求得的 x 代入任意一个原始解析式求 y。
5. **答（写出坐标）**：以有序数对 (x, y) 形式写出交点坐标。
口诀化就是：**“变形，联立，解x，代y，写坐标。”** 对于含参或几何问题，则在第3或4步融入额外条件（如点在轴上、面积等）列方程。

7. 答案与解析

第一关：基础热身

1. **解析：** 联立：$5x-7=-3x+1 \to 8x=8 \to x=1$，代入得 $y=-2$。交点：$(1,-2)$
2. **解析：** $\frac{3}{4}x=-2x+11 \to \frac{11}{4}x=11 \to x=4$，$y=3$。交点：$(4,3)$
3. **解析：** 直线 $y=10$ 是水平线，$x=-4$ 是竖直线，交点：$(-4,10)$
4. **解析：** $x-5=7 \to x=12$，$y=7$。交点：$(12,7)$
5. **解析：** 没有交点。因为斜率 k 相等（都是2），两直线平行。联立方程 $2x+3=2x-5$ 得 $3=-5$，矛盾，无解。
6. **解析：** $-x=0.5x+6 \to -1.5x=6 \to x=-4$，$y=4$。交点：$(-4,4)$
7. **解析：** 将 $(2,-1)$ 代入 $y=kx+3$：$-1=2k+3 \to 2k=-4 \to k=-2$。
8. **解析：** 检验：代入 $y=2x-2$，$4=4$，成立；代入 $y=-x+7$，$4=4$，成立。所以是交点。
9. **解析：** 变形：$y=-x+5$，$y=2x-1$。联立：$-x+5=2x-1 \to 6=3x \to x=2$，$y=3$。交点：$(2,3)$。
10. **解析：** 联立：$3=-2x+3 \to 0=-2x \to x=0$。交点：$(0,3)$。

第二关：中考挑战

1. **解析**：将 $(1,2)$ 分别代入：$2=2\times1+a\rightarrow a=0$； $2=-1+b\rightarrow b=3$。

2. **解析**：与 $y=-2x$ 平行，则 $k=-2$。与 $y=x+3$ 交于 y 轴：令 $x=0$，得 $y=3$，交点 $(0,3)$。代入 $y=-2x+b$： $3=0+b\rightarrow b=3$。解析式：$y=-2x+3$。

3. **解析**：图象法解方程组，解即为交点坐标。需根据图中交点位置读取，假设图中交点为 $(2,1)$，则解为 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$。（此处为示例，实际以图为准）

4. **解析**：先求交点：$-x+2=2x-1\rightarrow 3=3x\rightarrow x=1$， $y=1$。所以 $m=1,n=1$， $m+n=2$。

5. **解析**：方程解为 $x=3$，即交点横坐标。将 $x=3$ 代入 $y=4x-2$（或另一条）： $y=10$。纵坐标为 10。

6. **解析**：
   - 求 P：联立 $y=2x-1$ 与 $y=-x+4\rightarrow 2x-1=-x+4\rightarrow x=\frac{5}{3}$， $y=\frac{7}{3}$。 $P(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$。
   - $A(\frac{1}{2},0),B(0,-1),C(4,0),D(0,4)$。
   - 面积 $S_{OBPC}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OPC}$。 $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}\times OC\times|y_B|=\frac{1}{2}\times4\times1=2$。 $S_{\triangle OPC}=\frac{1}{2}\times OC\times y_P=\frac{1}{2}\times4\times\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$。 所以 $S_{OBPC}=2-\frac{14}{3}=-\frac{8}{3}$? 显然不对。应以 y 轴为界分割。 $S_{OBPC}=S_{\triangle OBP}+S_{\triangle OCP}$。
     $S_{\triangle OBP}=\frac{1}{2}\times OB\times x_P=\frac{1}{2}\times1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$。
     $S_{\triangle OCP}=\frac{1}{2}\times OC\times y_P=\frac{1}{2}\times4\times\frac{7}{3}=\frac{14}{3}$。
     总面积：$\frac{5}{6}+\frac{14}{3}=\frac{5}{6}+\frac{28}{6}=\frac{33}{6}=\frac{11}{2}$。

7. **解析**：先求交点 $(a,1)$ 在 $y=\frac{1}{3}x$ 上： $1=\frac{1}{3}a\rightarrow a=3$。 所以交点为 $(3,1)$。设 $l:y=k'x+b'$，过点 $(0,-3)$ 和 $(3,1)$。代入：

$-3 = b'$，$1 = 3k' - 3 \rightarrow k' = \frac{4}{3}$。解析式：$y = \frac{4}{3}x - 3$。

8. **解析**：先求 $y = 2x - 3$ 与 $y = x - 1$ 的交点：$2x - 3 = x - 1 \rightarrow x = 2$，$y = 1$。交点 $(2, 1)$ 也在 $y = kx + 2$ 上：$1 = 2k + 2 \rightarrow k = -\frac{1}{2}$。

9. **解析**：
   - 求 A, B: 令 $x = 0$, $y = 8 \rightarrow B(0, 8)$。令 $y = 0$, $x = 6 \rightarrow A(6, 0)$。$AB = 10$。
   - 点 C 在 x 轴上，设 $C(c, 0)$。$\triangle ABC$ 等腰，分情况：
     1. $AB = AC = 10$: 则 $|c - 6| = 10 \rightarrow c = 16$ 或 $c = -4$。$C(16, 0)$ 或 $C(-4, 0)$。
     2. $BA = BC$: $BA = 10$，$BC = \sqrt{c^2 + 8^2} = 10 \rightarrow c^2 = 36 \rightarrow c = \pm 6$。$c = 6$ 与 A 重合舍去，故 $C(-6, 0)$。
     3. $CA = CB$: $\sqrt{(c-6)^2} = \sqrt{c^2 + 8^2} \rightarrow$ 平方得 $c^2 - 12c + 36 = c^2 + 64 \rightarrow -12c = 28 \rightarrow c = -\frac{7}{3}$。$C(-\frac{7}{3}, 0)$。

10. **解析**：将 $P(2, -1)$ 代入两个函数求 m, n：$-1 = -2 + m \rightarrow m = 1$；$-1 = 2n + 2 \rightarrow n = -\frac{3}{2}$。方程组化为 $\begin{cases} x + y = 1 \\ -\frac{3}{2}x - y = -2 \end{cases}$。但题目问的是“方程组的解”，由一次函数与二元一次方程组的关系可知，方程组的解即为交点坐标，故解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$。

第三关：生活应用

1. **解析**：联立：$0.8x = -0.5x + 20 \rightarrow 1.3x = 20 \rightarrow x \approx 15.38$ (米)。$y \approx 12.31$ (米)。会相交于约 $(15.38, 12.31)$ 处。

2. **解析**：甲：$y = 2x + 10$；乙：$y = 2.5x$。令 $2x + 10 = 2.5x \rightarrow 0.5x = 10 \rightarrow x = 20$ (公里)。答：行驶20公里时车费相同。

3. **解析：**

- 直线 OA：方向角30度，斜率 $k_1 = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$，过原点，解析式：$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$。 由 $OA = 50$，可设 $A(50\cos 60^\circ, 50\sin 60^\circ) = (25, 25\sqrt{3})$。验证：代入解析式，$25\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 25$，成立。
- 直线 OB：方向角120度，斜率 $k_2 = \tan(120^\circ) = -\sqrt{3}$，解析式：$y = -\sqrt{3}x$。由 $OB = 30$，可设 $B(30\cos 150^\circ, 30\sin 150^\circ) = (-15\sqrt{3}, 15)$。
- 求 AB 距离： $AB = \sqrt{(25-(-15\sqrt{3}))^2 + (25\sqrt{3}-15)^2} = \sqrt{(25+15\sqrt{3})^2 + (25\sqrt{3}-15)^2}$， 计算略。

4. **解析：**

- 求 BC 解析式： $B(20,0)$， $C(0,15)$， 斜率 $k = \frac{15-0}{0-20} = -\frac{3}{4}$， 截距 $b = 15$。 解析式：$y = -\frac{3}{4}x + 15$。
- 求与 $y = 5$ 的交点 D： $5 = -\frac{3}{4}x + 15 \rightarrow -\frac{3}{4}x = -10 \rightarrow x = \frac{40}{3}$。 所以 D 的横坐标为 $\frac{40}{3} \approx 13.33$。

5. **解析：**

- 甲10秒后位置：水平飞行 $y = 200$， 飞行距离 $30 \times 10 = 300$ 米， 所以位置为 $A(300, 200)$。
- 乙需从 $P(1000,0)$ 出发，10秒飞至 A 点，飞行距离 $40 \times 10 = 400$ 米。验证 $PA = \sqrt{(300-1000)^2 + (200-0)^2} = \sqrt{(-700)^2 + 400^2} = \sqrt{490000+160000} = \sqrt{650000} \approx 806$ 米 > 400米，不可能直接飞到。题目设定“乙沿直线 $y = kx$ 飞行”，意味着乙从原点出发？但乙是从 $P(1000,0)$ 出发。这里可能有歧义。更合理的设定是：乙从 P 出发，沿直线飞行，10秒后与甲在甲路径上某点 Q 相遇。

- 设相遇点 $Q(t,200)$，其中 t 是甲飞行时间（10秒）内飞行的水平距离，$t\in[0,300]$。则甲飞行时间 $t/30$ 秒？不，甲速30m/s，水平距离 $x_A=30T$，其中 $T=10$秒，所以 $x_A=300$是固定的。所以相遇点 Q 就是 $A(300,200)$。
- 乙需在10秒内从 $P(1000,0)$ 飞到 $A(300,200)$，距离 PA 约806米，所需速度至少80.6米/秒，大于其40米/秒。因此，在给定速度和时间内，乙无法与甲在甲出发10秒时相遇。题目可能数据有误，或需调整会合时间。核心思路是：先确定甲的位置，再根据乙的起点、速度和所需时间，求乙的飞行方向（直线斜率）。