六上-数学广角数与形

六年级

本资料为**六年级** 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

数学广角——数与形

同学们，从一年级开始，我们就认识了各种图形，也学习了各种各样的数。你有没有想过，数和形之间有着非常奇妙的联系呢？通过图形，我们可以更直观地理解数的规律；通过数，我们可以更精确地描述图形的特征。这就是“数形结合”的思想，是数学中非常重要的思维方法。

知识要点

核心概念

“数与形”就是研究数字规律和几何图形之间的对应关系。简单来说，就是“看数想形，看形想数”。很多复杂的数列规律，用一个简单的图形画出来，就一目了然了。

例如，连续奇数之和：$1+3+5+7+...$，用点阵图表示，正好可以拼成一个正方形。第 n 个图形就有 n^2 个点。所以，从 1 开始的 n 个连续奇数的和等于 n^2，即 $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$。

计算法则（从图形中找数列规律）

观察图形： 仔细看图形的构成方式，是如何一层层增加或变化的。

用数记录： 把每个图形的数量（如点数、小正方形数）记录下来，形成一个数列。

寻找关系： 分析相邻两个数之间的差，或者每个数与它的序数（第几个图形）之间的关系。

验证规律： 用你发现的规律推导下一个图形对应的数，或者画出图形，看是否符合。

记忆口诀

数形结合好伙伴，复杂规律变直观。

数列变化找关联，画个图形试试看。

连续奇数和简单，拼成正方数平方。

🔗 知识关联

奇数、偶数： 连续奇数求和是本节的基础。

数列规律： 五年级找规律题目的图形化升级。

平面图形面积： 用面积公式（如正方形、梯形）来计算点数。

分数乘法： 图形可以帮助理解如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ 这类无穷求和问题。

易错点警示

❌ **错误1：** 在数由多个基本图形组成的复杂图形时，只数了整体，漏掉了内部的小图形。

☑️ **正解：** 按照一定的顺序数，比如“先分块，再总和”，或者“按大小分类数”，做到不重不漏。

❌ **错误2：** 把图形的“层数”和每层的“个数”关系弄混。例如，把等差数列的和公式 $(\text{首项}+\text{末项})\times\text{项数}\div 2$ 错误地用在图形上。

☑️ **正解：** 明确图形中哪一部分对应“首项”、“末项”和“项数”。比如三角形点阵，层数就是项数，第一层个数是首项，最后一层个数是末项。

❌ **错误3：** 在找复杂图形的规律时，只看了前两项就匆忙下结论，没有验证第三项。

☑️ **正解：** 至少观察并分析三个连续图形的变化规律，并用发现的规律去验证第四个图形是否成立，养成严谨的习惯。

例题精讲

🔥 例题1：

观察下面用棋子摆成的“T”字图案，按照此规律，摆第10个图案需要多少枚棋子？

图1： ●●● (3个)

图2： ●

●●●● (1+4=5个)

图3： ●

●

●●●●● (1+1+5=7个)

📌 **第一步：** 记录前三个图形的棋子数。图1: 3， 图2: 5， 图3: 7。

📌 **第二步：** 寻找规律。相邻两数差都是 2，这是一个公差为 2 的等差数列。首项 $a_1 = 3$，公差 $d = 2$。

📌 **第三步：** 应用等差数列公式求第10项。第 n 项公式：$a_n = a_1 + (n-1) \times d$。代入得：$a_{10} = 3 + (10-1) \times 2 = 3 + 18 = 21$。

☑️ **答案：** 摆第10个图案需要 21 枚棋子。

💬 **总结：** 将图形数量转化为数列，是解决此类问题的关键。找到数列的规律（如等差数列、等比数列），就能轻松求出任意项。

🔥 例题2：

用小棒按下图方式摆三角形。摆 n 个这样的三角形需要多少根小棒？

（图示：第一个三角形3根，第二个三角形在第一个基础上共用一条边，增加2根，共5根...）

📌 **第一步：** 记录数量。摆1个：3 根；摆2个：5 根；摆3个：7 根。

📌 **第二步：** 寻找图形与数的关系。每多摆1个三角形，就增加 2 根小棒。第一个三角形用了 3 根，可以看作 $3 = 1 + 2 \times 1$。第二个 $5 = 1 + 2 \times 2$，第三个 $7 = 1 + 2 \times 3$。

📌 **第三步：** 归纳公式。摆 n 个三角形需要的小棒数 $S = 1 + 2 \times n$，即 $S = 2n + 1$。

☑️ **答案：** 摆 n 个这样的三角形需要 $(2n+1)$ 根小棒。

💬 **总结：** 对于“共用边”的图形排列，要抓住“第一个是基础，后面每增加一个所需的增量是固定的”这一特点来建立公式。

🔥 例题3：

计算：$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$。你能用一个图形来解释这个结果吗？

📌 **第一步：** 画一个正方形代表整体“1”。将其平均分成两半，一半涂色表示 $\frac{1}{2}$。

📌 **第二步：** 将剩下的一半再平均分成两半，给其中一份涂上另一种阴影，表示加上 $\frac{1}{4}$。此时涂色部分为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$。

📌 **第三步：** 重复这个过程，每次都将剩余部分等分后涂色一份。你会发现，随着加的次数增多，涂色部分无限接近整个正方形，但永远缺少最后那一小份未涂色的部分。

☑️ **答案：** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$。

💬 **总结：** 图形完美地展示了这个分数求和的意义——每次加上剩余部分的一半，总和会越来越接近1，但除非加无穷多项，否则永远小于1。

练习题（10道）

观察点阵图：第1个图有1个点，第2个图有4个点（正方形），第3个图有9个点（更大的正方形）。请问第6个图有多少个点？

用小棒摆正方形。摆1个用4根，摆2个用7根（相连），摆3个用10根。摆8个这样的正方形需要多少根小棒？

根据规律填数：1, 3, 6, 10, 15, ( ), 28。这个数列与“三角形点阵”有什么关系？

计算：$2+4+6+8+10$。你能用点阵图（长方形）表示这个算式吗？

一张桌子坐4人，两张桌子拼起来坐6人，三张桌子拼起来坐8人（桌子一字排开）。15张桌子这样拼起来，可以坐多少人？

如下图，第5个图形中有多少个白色小正方形？
（图形描述：图1：1白；图2：1白3黑（田字格中左下白，其余黑）；图3：4白5黑（九宫格中左下田字格白，其余黑）——规律是第n个图形，白色是 $(1+2+...+n)$ 个）

蜂巢的六边形结构。第一圈有1个六边形，第二圈围绕它有6个，第三圈有12个。那么第四圈有多少个六边形？（假设每圈都是完整的）

用计算器探索：$1\times8+1=9$, $12\times8+2=98$, $123\times8+3=987$。根据规律，写出 $123456\times8+6$ 的得数。

一个楼梯形的点阵（第一行1点，第二行2点...），共有5行。这个点阵的总点数，可以用梯形面积公式（上底+下底）×高÷2来计算吗？试试看。

如下图，是用火柴摆成的“金鱼”。摆1条用8根，摆2条用14根。摆10条这样的“金鱼”需要多少根火柴？

奥数挑战（10道）

有一个由单位正方形组成的“L”形图案（拐杖形），其面积是奇数。请问它的周长可能是偶数吗？请说明理由。

求 $1\times2+2\times3+3\times4+...+99\times100$ 的和。提示：$n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{3}$
。

将自然数1，2，3，4...按下图方式排列，请问数字2025会在第几行第几列？
（给出一个蛇形矩阵示例，如第一行1 2 3 4，第二行8 7 6 5，第三行9 10 11 12...）

用黑白两种颜色的正六边形地砖按下图规律拼成图案。第 n 个图案中，白色地砖有多少块？黑色地砖有多少块？

观察：$1^3=1, 1^3+2^3=9=(1+2)^2, 1^3+2^3+3^3=36=(1+2+3)^2$。请计算 $1^3+2^3+3^3+...+10^3$，并验证规律。

在圆周上画若干个点，每两点之间连一条线段。如果画了10个点，那么最多可以把圆分成多少份？

斐波那契数列与花瓣数有关：1，1，2，3，5，8，13... 前 n 项的和 S_n 与第 $n+2$ 项有什么关系？用具体例子找规律。

杨辉三角的每一个数都可以看作一个“路径数”。从顶端的“1”到达第4行第2个“3”，有多少条不同的路径？（每次只能向左下或右下走）推广到第 n 行第 m 个数呢？

用9根火柴可以摆出多少个不同的三角形？（要求边长均为整数根火柴）

有一种“正方形数”可以表示成两个相邻“三角形数”之和。例如，$4=1+3, 9=3+6$。请问第100个“正方形数”可以表示成哪两个相邻的“三角形数”之和？

生活应用（5道）

（高铁座位排列） 一列“复兴号”高铁车厢的座位号是按“3+2”模式排列的（左边3个座，过道，右边2个座）。如果这节车厢有20排座位，不考虑特殊号，这节车厢一共有多少个座位？你能用一个简单的算式表示吗？

（航天器太阳能板） 某个卫星的太阳能帆板展开后，由许多小太阳能电池片组成一个长方形阵列。已知这个阵列有48行，每行有60片电池。工程师为了检查，需要快速估算总数。他先算 $50\times60=3000$，再减去 $2\times60=120$，得到2880片。他用到了什么数学思想和运算律？

（AI围棋棋盘） 标准的围棋棋盘是19行19列的网格。请问整个棋盘上，一共可以形成多少个大小不同的正方形？（包括1x1, 2x2, ..., 19x19）

（环保回收） 社区开展塑料瓶回收活动。回收站将瓶子堆成如图所示的“三角形垛”。最上层有1个，第二层有2个，第三层有3个，以此类推。如果堆了15层，这一垛一共有多少个瓶子？

（网购物流码放） 仓库管理员需要将一批同样大小的正方体快递箱码放在墙角（两面墙和地面）。从正面看，第一层码放了长5箱、高3箱的一个长方形面。如果把这个墙角堆满，形成一个长方体，一共需要多少箱？请画出草图帮助思考。

参考答案与解析

【练习题答案】

$6^2 = 36$（个）。规律：第 n 个图的点数是 n^2。

$4 + 3 \times (8 - 1) = 25$（根）。或 $3 \times 8 + 1 = 25$（根）。

21。这是三角形数，第 n 个数是 $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$。

30。可以画一个宽为2，长为5的长方形点阵，总点数为 $2 \times 5 = 10$，但这是 2×5。原式是5项，首项2末项10，和为 $(2 + 10) \times 5 \div 2 = 30$。也可以用 $2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 2 \times 15 = 30$。

$4 + 2 \times (15 - 1) = 32$（人）。两端各坐1人，中间每张桌子两侧各增坐1人。

第n个图形白色小正方形数为 $1 + 2 + ... + n$。第5个图形：$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$（个）。

每圈增量是6的倍数。第一圈1，第二圈6，第三圈12，第四圈18。规律：第n圈（n>1）有 $6 \times (n - 1)$ 个。所以第四圈有 $6 \times (4 - 1) = 18$（个）。

观察规律，得数是从9开始的连续倒序数字，位数与加数相同。$123456 \times 8 + 6 = 987654$。

可以。上底（第一行点数）=1，下底（第五行点数）=5，高（行数）=5。总点数 = $(1 + 5) \times 5 \div 2 = 15$。实际数数验证：1+2+3+4+5=15，正确。

摆1条：8根；摆2条：8+6=14根；摆3条：8+6+6=20根。规律：第一条8根，以后每多一条加6根。摆10条：$8 + 6 \times (10 - 1) = 8 + 54 = 62$（根）。

【奥数挑战答案】

不可能。 面积是奇数，说明由奇数个单位正方形组成。每个单位正方形周长贡献4条边，但内部相邻边不计入最终周长。可以证明，由奇数个单位正方形组成的多边形的周长必为偶数（单位长度）。可通过染色法或模2（奇偶性）分析证明。

解析： 利用提示的裂项公式：$n(n+1) = \frac{1}{3}[n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)]$。

原式 = $\frac{1}{3}[(1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2) + (2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3) + ... + (99 \cdot 100 \cdot 101 - 98 \cdot 99 \cdot 100)]$

= $\frac{1}{3} \times 99 \times 100 \times 101 = 333300$。

解析： 观察蛇形矩阵，每4个数一循环，奇数行从左到右，偶数行从右到左。先找2025在第几个“大组”：$2025 \div 4 = 506...1$，所以在第507大组（506个完整组+余1）。行数：第507大组的第一行。因为每组占两行，所以行号 $R = 506 \times 2 + 1 = 1013$。列数：因为是第507大组的第一个数，且1013是奇数行，所以从左排起，第一列。答案：第1013行，第1列。

（需根据具体图形给出通项公式，示例） 假设规律：第1个图：1白6黑；第2个图：6白12黑；第3个图：11白18黑...则白色：$1 + 5(n - 1) = 5n - 4$；黑色：$6n$。

$1^3 + 2^3 + ... + 10^3 = (1 + 2 + ... + 10)^2 = 55^2 = 3025$。规律成立：前n个自然数的立方和等于它们和的平方。

解析： 这是平面分割问题。公式：$1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$。当 $n=10$ 时，计算得 $1+45+210=256$ 份。

关系：$S_n=F_{n+2}-1$。例如：前1项和=1，第3项是2；前4项和=7，第6项是8。

到第4行第2个“3”的路径有3条。推广：杨辉三角的第 n 行第 m 个数（从0开始计数）就是组合数 C_{n-1}^{m-1}，它也表示从顶点到该点的路径数。

三角形边长满足：a+b>c，且a+b+c=9。枚举：(3,3,3); (4,3,2); (4,4,1)不成立(1+4不大于4); (5,3,1)不成立; (5,2,2)不成立(2+2不大于5); (2,3,4)与(4,3,2)同。所以有2种：等边三角形(3,3,3)和等腰不等边(4,3,2)。注意(2,3,4)与(4,3,2)是同一个三角形。

第n个正方形数是 n^2。第n个三角形数是 $\frac{n(n+1)}{2}$。相邻三角形数是第k和k-1个。有 $n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$。所以第100个正方形数 = 第99个三角形数 + 第100个三角形数 = $\frac{99\times100}{2}+\frac{100\times101}{2}=4950+5050=10000$。

【生活应用答案】

每排座位数：$3+2=5$（个）。20排总座位数：$5\times20=100$（个）。算式：$(3+2)\times20$。

他用了“化整为零”的简便计算思想和乘法分配律。$48\times60=(50-2)\times60=50\times60-2\times60$。

边长为 k $(1\le k\le19)$ 的正方形数量为 $(19-k+1)^2$ 个。总数为 $1^2+2^2+...+19^2$。利用公式 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 计算，$n=19$：$\frac{19\times20\times39}{6}=2470$（个）。

这是求三角形数。$S=1+2+...+15=\frac{15\times16}{2}=120$（个）。

这实际上是在求一个长、宽、高分别为5，3，？ 的长方体的体积。从墙角码放可知，长、宽、高正好利用了墙角。从“正面看是长5高3”可知，长方体的长=5，高=3。从“堆满墙角”可知，宽需要根据侧面形状确定。题目暗示是“同样大小的正方体快递箱”码成“长方体”，且只给了正面信息，通常理解为紧贴两面墙，那么宽就是另一面墙的利用长度。但题目信息不足，需假设。常见理解：如果从上方看，第一层码放了宽?箱、长5箱的一个长方形面。若假设宽为W，则总体积为 $5\times3\times W$。但W未给出。另一种理解：利用墙角堆成一个最大的长方体，则长、宽、高就是5，3和？ 。根据生活实际，可能需要学生意识到这是一个三维问题，需要三个维度数据。若补充：从侧面看，第一层是宽3箱、高3箱的正方形，那么宽=3。总体积 $5\times3\times3=45$（箱）。此处答案不唯一，旨在引导学生思考三维图形。建议答案：**需要知道从侧面看的层数（即宽度）才能计算。如果宽度也是3箱，那么一共需要 $5\times3\times3=45$ 箱。**

更多六年级练习题

六上-扇形统计图

12-18

六上-百分数1

12-18

六上-圆

12-18

六上-比

12-18

六上-分数除法

12-18

六上-位置与方向2

12-18