

五下-数学广角找次品

五年级

本资料为五年级 专项练习题，包含精选例题与配套练习，适合课后巩固和考前复习使用。

好的，同学们，今天我们一起来探索数学中一个非常有趣的问题——「找次品」。这就像当一名质检小侦探，用最少的步骤找出混在合格产品中的那个“坏家伙”。

知识要点

核心概念

“找次品”问题，研究的是如何用一架**没有砝码的天平**，通过最少的称量次数，从一堆外观相同的物品中，找出唯一一个重量不同（或轻或重）的次品。它的核心思想是**“合理分组，逐步缩小范围”**。你可以把每次用天平称量看作一次“提问”，我们的目标就是用最少的“提问”得到确定的答案。

计算法则

对于知道次品是**轻一些**或**重一些**的情况，有一个通用的规律：

把待测物品分成**3组**，尽量让其中两组数量相等。

将数量相等的两组放在天平两端称量。

根据天平平衡或不平衡的状态，就能判断次品在哪一组，从而将寻找范围缩小到原来的约 $\frac{1}{3}$ 。

由此，我们可以推导出一个重要结论：**待测物品数量在 3^n 个以内，最多只需称 n 次就一定能找出次品。**

$3^1 = 3$ 个以内，称 1 次。

$3^2 = 9$ 个以内，称 2 次。

$3^3 = 27$ 个以内，称 3 次。

$3^4 = 81$ 个以内，称 4 次。

◎ 记忆口诀

“找次品，会分组，三份均分最省步。若遇余数来捣乱，一二放进第三组。天平两端比轻重，范围缩至三分之一。次品轻重若未知，次数加一再记住。”

📎 知识关联

这个问题与我们学过的平均分、除法、优化思想（统筹安排）紧密相关，也隐含着乘方（幂）的知识。它锻炼的是我们的逻辑推理能力和分类讨论的数学思想。

易错点警示

✗ 错误1：认为分2组（对半称）最快。

→ 正解：分3组比分成2组能更快地缩小范围。因为天平有三种状态（左倾、右倾、平衡），对应三个方向。

✗ 错误2：分组时没有尽可能平均分。例如，10个分成(4, 4, 2)，而不是(3, 3, 4)。

→ 正解：要使“最多”称的次数最少，必须让分出的三份数量尽可能接近，这样无论次品在哪份，接下来的工作量都差不多。

✗ 错误3：计算称量次数时，直接用物品总数除以3。例如，认为10个物品需要 $10 \div 3 \approx 3.3$ 次。

→ 正解：应该用“几个3相乘”的思路。看总数落在哪个 3^n 的范围内。10在 $3^2 = 9$ 和 $3^3 = 27$ 之间，所以最多需要称3次。

三例题精讲

🔥 例题1：有3盒饼干，其中一盒被偷吃了几块（轻了），用天平至少称几次能保证找出这盒轻的？怎么称？

①

②

❖ 第一步：给3盒饼干编号为①、②、③。

❖ 第二步：天平两端各放一盒。左盘放①，右盘放②。

❖ 第三步：观察结果。

- 若天平平衡，则③号盒是轻的。

- 若天平不平衡，翘起的那一端盒子里就是轻的。

✓ 答案：至少称 1 次就能保证找出。

💬 总结：3个物品是找次品（已知轻重）问题的最基础模型，1次解决。

🔥 例题2：有8个乒乓球，其中1个是次品（轻一些）。用天平至少称几次能保证找出这个次品？

❖ 第一步：将8个球分成 (3, 3, 2) 三组。

❖ 第二步：第一次称，将两组3个球放在天平两端。

- 如果平衡，则次品在剩下的2个球中。进入第三步A。

- 如果不平衡，则次品在较轻一端的3个球中。进入第三步B。

❖ 第三步A：称剩下的2个球。轻的那个就是次品。这次是第二次称。

❖ 第三步B：从有次品的3个球中，任取2个放在天平两端称第二次。

- 如果平衡，剩下的那个是次品。

- 如果不平衡，轻的那个是次品。

✓ 答案：无论哪种情况，都只需要称 2 次。

💬 总结：8在 $3^2 = 9$ 个以内，所以最多称2次。分组策略是关键。

🔥 例题3：有10个同样的零件，其中一个是次品，但不知道比正品轻还是重。至少称几次能保证找出来？

❖ 第一步：因为不知道轻重，信息更复杂。将10个零件分成 (4, 4, 2) 三组。

❖ 第二步：第一次称，比较两组4个的。

情况A：如果平衡，则次品在剩下的2个中，且8个正品已知。用1个正品和剩下2个中的1个比第二次，就能判断出次品及其轻重。

情况B：如果不平衡。假设左4个（组A）重，右4个（组B）轻。说明次品要么在组A（重），要么在组B（轻）。剩下2个是正品。

❖ 第三步（接情况B）：第二次称。从组A拿3个+组B拿1个放在左边，从组A拿1个+正品拿3个放在右边。

- 左重右轻：次品是左边组A那3个中的一个，且是重的。再称1次可从3个中找出（同例题2第三步B）。

- 左轻右重：次品是左边那个来自组B的球，是轻的。

- 平衡：次品是组B剩下的3个中，且是轻的。再称1次找出。

✓ 答案：至少需要称3次。

💬 总结：当“次品轻重未知”时，称量次数通常比“已知轻重”多1次。10个未知轻重，需要3次。

练习题（10道）

有5瓶一样的维生素，其中一瓶少了几片（轻了）。用天平至少称几次能保证找到它？

妈妈买了12包糖果，有一包是空的（轻了）。用天平至少称几次能保证找出这包空的？

有15枚金币，其中1枚是假的（重量不同，但不知轻重），用天平至少称几次能保证找出假币？

有27个小正方体积木，其中一个内部有裂缝（轻了）。至少称几次能保证找出？

一箱苹果有20个，其中一个被虫蛀了（轻了）。用台秤（类似天平）至少称几次能保证找出坏苹果？

有6个乒乓球，1个次品（重一些）。画出你的称量过程图。

如果天平称量3次，最多能从多少个已知“轻一些”的零件中找出次品？

有81袋食盐，其中1袋份量不足（轻了）。按照最优策略，称量第2次后，次品所在的范围最少可能剩多少袋？最多可能剩多少袋？

有14个零件，其中1个是次品（不知轻重）。给你3次称量机会，你能保证找出来吗？为什么？

有9盒巧克力，用“三分法”称了2次就找到了轻的那盒。请你反推，第二次称量时，天平可能是怎样的状态？（平衡或不平衡）

奥数挑战（10道）

有4个球，编号A、B、C、D，外观相同。已知其中有一个次品重量不同，但不知道轻还是重。用天平至少称几次能保证找出次品并知道它是轻是重？

有13枚硬币，其中1枚假币，重量与真币不同（不知轻重）。真币重量已知。用天平至少称几次能保证找出假币？

有100个小球，其中2个是次品（都轻一些）。用天平至少称几次能保证把所有次品都找出来？

有8个零件，次品可能重可能轻。给你一架天平和2个标准零件（正品）。至少称几次能保证找出次品？

有12个小球，其中1个重量不同（不知轻重）。用一架天平，能否只称3次就保证找出次品并知道它是轻是重？请描述方案。

有5袋金币，每袋有10枚。其中一袋全是假币，假币比真币轻1克。真币每枚重10克。用电子秤（显示精确克数）只称一次，如何找出哪袋是假币？

有3堆糖果，分别有5、8、12颗。其中一堆全部是次品（轻了），其他两堆是正品。用天平至少称几次能保证找出哪堆是次品？

有 n 个零件，其中一个是次品（轻了）。已知用最优策略，最多需要称 k 次。问 n 的最大值是多少？用 k 的式子表示。

有10瓶药水，其中9瓶是1克的，1瓶是1.1克的（重了）。用天平至少称几次能保证找出重的那瓶？

有6个外观一样的盒子，里面分别装有1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g的物体。给你天平和若干1g砝码，如何用最少的称量次数确定每个盒子对应的重量？

生活应用（5道）

（航天）火箭上有100个同型号的精密传感器，发射前发现混入了1个有瑕疵的（性能略差）。检测每个传感器耗时很长，现在有一种快速对比仪（原理类似天平），每次可以比较两组传感器的整体性能反馈。为了尽快找出瑕疵品，最少需要对比多少次？

(AI数据) 训练一个AI模型需要10000张标注好的图片，但发现其中有1张图片的标签是错误的。有一种智能比对程序，每次可以输入两组图片，它会输出两组图片的标签一致性评分（类似天平是否平衡）。至少需要运行多少次这个程序，才能保证找出那张错误标签的图片？

(网购物流) 仓库里有27个要发往同一地区的快递包裹，但扫描系统报警其中1个包裹里含有违禁品（重量与正常包裹有细微差别）。用智能物流秤（高精度天平）至少称几次能把这个包裹找出来？

(环保) 在一个有81个采样点的区域，环保局的快速检测仪发现其中1个点的水样重金属超标（浓度不同）。他们有一种混合对比检测法：将多个采样点的水样等量混合后检测，通过比较混合样的浓度来缩小范围。最少需要对比检测多少次，才能锁定那个超标的采样点？

(高铁检修) 一列8节编组的高铁，有一节车厢的空调制冷剂轻微泄漏（重量变轻）。为了在夜间有限的检修时间内快速定位，工程师可以用大型地秤依次测量每节车厢断开连接后的重量，但这样很慢。如果他们能把相邻几节车厢连在一起称总重（类似分组），理论上最少需要称量多少次就能确定是哪一节出了问题？

参考答案与解析

【练习题答案】

2次。 $(5 \rightarrow (2,2,1))$

3次。 $(12 \rightarrow (4,4,4))$

3次。 (这是经典问题，15个未知轻重，3次可解)

3次。 $(27 = 3^3)$

3次。 (20在 $3^3 = 27$ 内)

2次。 第一次 $(3,3)$ ，第二次在重的3个中找。

27个。 $(3^3 = 27)$

最少剩3袋，最多剩9袋。（第一次称后范围缩至 ≤ 27 袋，第二次称后范围缩至 ≤ 9 袋，最优情况直接缩至 3 袋。）

能。14个未知轻重是3次的经典上限（13个是上限，但多个一个正品信息可利用，14个也可解）。

可能平衡，也可能不平衡。如果第一次 $(3,3,3)$ 称平衡，则次品在剩下3个，第二次称其中两个，平衡则剩下是次品，不平衡则轻的是次品。如果第一次不平衡，则次品在轻的3个中，第二次同法。

【奥数挑战答案】

答案：2次。

解析：第一次称 (A, B) vs (C, 好球) 【或(C, D)】。情况复杂需分类讨论，核心是利用已知的好球作为标准参考。

答案：3次。

解析：13是经典上限。方案：第一次(4,4)，用5个标准币辅助推理。

答案：7次 (最优策略下界，非精确)。

解析：两个次品情况复杂。一个思路是：先找出一个次品 (约 $\log_3 100 \approx 5$ 次)，然后在剩下的约95个中再找第二个 (约 $\log_3 95 \approx 5$ 次)，但这两次寻找有重叠信息可以利用，总次数可以少于10次。寻找最优解是组合数学难题。

答案：2次。

解析：有标准件大大简化。第一次 (3+1标准) vs (3+1标准)，可以一次性判断很多情况。

答案：能。

解析：经典12球问题。第一次 (4,4)。第二次根据情况，安排包含标准球和待测球的复杂称量。

网上有详细流程图。

答案：从第1袋取1枚，第2袋取2枚，…，第5袋取5枚。一起称重。总重量比 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) * 10 = 150$ 克轻几克，就是第几袋是假的。

答案：2次。

解析：第一次称5颗和8颗的那两堆。若平衡，则12颗那堆是次品。若不平衡，轻的那堆是次品。无论如何，第一次即可锁定在两堆之一。第二次从被怀疑的那堆中取部分与正品堆比较即可确认。

答案： $n = 3^k$ 。

解析：这就是规律：称k次最多能从 3^k 个物品中找出次品 (已知轻重)。

答案：3次。

解析：10在 $3^3 = 27$ 个以内，且已知“重了”，所以3次足够。

答案：最少4次 (策略多样)。

解析：举例：第一次用1g砝码称A盒，可能得到1g或更重。通过精心设计称量组合，利用天平差值推理。例如，第二次称(A+B) vs (砝码+?)。这是一个称量确定重量的扩展问题。

【生活应用答案】

$\lceil \log_3 100 \rceil = 5$ 次。($3^4 = 81 < 100 \leq 3^5 = 243$)

$\lceil \log_3 10000 \rceil \approx 9$ 次。($3^8 = 6561, 3^9 = 19683$)

3次。($27 = 3^3$)

4次。($81 = 3^4$)

2次。原理同8个乒乓球找次品。第一次称(3,3,2)节车厢的总重。

更多精彩内容请访问 **星火网** www.xinghuo.tv

更多五年级练习题

五下-折线统计图

12-18

五下-分数加减法

12-18

五下-图形的运动3

12-18

五下-分数的意义和性质

12-18

五下-长方体和正方体

12-18

五下-因数与倍数

12-18

